Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Л. В. КАНТОРОВИЧ

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 5 I 1937)

В моей заметке «О некоторых классах линейных операций» (1) были рассмотрены три класса линейных операций в полуупорядоченных пространствах: H_t^0, H_0^0 и H_t^t*. Здесь я даю некоторые теоремы о сходимости последовательностей операций классов H_t^t и H_0^0, аналогичные теореме Banach'a-Steinhaus'a (3) о последовательностях линейных операций. При этом теоремы об операциях класса H_0^0 позволяют устанавливать (o)-сходимость, например сходимость почти везде последовательности функций, в то время как теорема Banach'a-Steinhaus'a в том же случае дает лишь сходимость по мере или в среднем. Некоторые из возможных применений будут даны в следующей заметке.

§ 1. Предполагаем, что X и Y—регулярные полуупорядоченные пространства (S_6). Множество $E \subset X$ называется (t)-ограниченным [(o)-ограниченным], если при $\lambda_n \to 0$ и $x_n \ni E$ всегда $x_n \to 0$ (t) [соответственно (o)]. Иначе, E (o)-ограничено, если $|x| \leqslant x_0$ для всех $x \ni E$, x_0 — фиксированный элемент X.

Теорема 1. Для того чтобы операция U принадлежала классу H_t^t (H_0^0), необходимо и достаточно, чтобы (t)-ограниченность [соответственно (o)-] множества E влекла (t)-ограниченность [соответственно (o)-] его образа $U(E)$.

Последовательность операций $\{U_n\}$ класса H_t^t (H_0^0) будем называть (t)-ограниченной [(o)-ограниченной], если при (t)-ограниченности [соответственно (o)-] множества E таким же будет и сумма его образов $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(E)$.

Замечание. Если X и Y — пространства типа B_2, то последовательность операций $\{U_n\}$ (t)-ограничена, если ограничена последовательность их норм $\{\| U \|_t^t\}$.

Теорема 2. Для того чтобы операции $\{U_n\}$ образовывали (t)-ограниченную [(o)-ограниченную] последовательность, необходимо и доста-

---

* Мы здесь и в дальнейшем пользуемся определениями и обозначениями цитированной заметки (1). Дальнейшие литературные ссылки там же, см. также (2)

точно, чтобы они были равно-непрерывны в точке $x=0$. Точнее говоря, чтобы при $x_k \to 0(t)$ [соответственно (o)] мы имели $U_{n_k}(x_k) \to 0\,(t)$ [соответственно (o)], каковы бы ни были натуральные n_k [ср. (4)].

Теорема 3. Последовательность операций $\{U_n\}$ (o)-ограничена только тогда, когда операции $\{U_n\}$ образуют (o)-ограниченное множество в пространстве регулярных операций, переводящих X в Y, т. е. когда существует операция U_0 такая, что $|U_n(x)| \leqslant U_0(|x|)$ для всех $x \ni X$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Все сказанное доказывается легко. Несколько менее проста

Теорема 4. Чтобы последовательность операций $\{U_n\}$ класса H_t^t была (t)-ограничена, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $x \ni X$ множество $\{U_n(x)\}$ было (t)-ограничено.

Доказательство. Необходимость условия очевидна, достаточность докажем, пользуясь методом Lebesgue'a*). Пусть последовательность $\{U_n\}$ не (t)-ограничена. Тогда найдутся $\overline{x}_k \ni X$ и целые n_k такие, что последовательность $\{x_k\}$ (t)-ограничена, а $U_{n_k}(x_k)$ не (t)-ограничена. Благодаря последнему существуют такие $\mu_k \to 0$, что $U_{n_k}(\mu_k \overline{x}_k)$ не будет $\to 0\,(t)$ при $k \to \infty$.

Можем считать $\mu_k > 0$. Положим $V_k = \sqrt{\mu_k} U_k$. Тогда для всякого $x \ni X: V_k(x) \to 0\,(t)$, но по-прежнему последовательность $\{V_k\}$ не (t)-ограничена. Итак, найдется последовательность $x_k \to 0(t)$ такая, что $V_k(x_k)$ не $\to 0(t)$ (достаточно взять $x_k = \sqrt{\mu_k} \cdot \overline{x}_k$).

Можем считать, что и для всякой частичной последовательности $V_k(x_k^*)$ не будет $\to 0\,(t)$.

Переходя к частичной последовательности, можем добиться того, что: 1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty$, 2) $V_m(x_k) \to 0\,(o)$ при $m \to \infty$ для всех k, 3) $V_m(x_k) \to 0\,(o)$ при $k \to \infty$ для всех m.

Благодаря этому найдется такое y^*, что $|V_m(x_k)| \leqslant \varepsilon y^*$ при $m \geqslant M(\varepsilon, k)$ и $|V_m(x_k)| \leqslant \varepsilon y^*$ при $k \geqslant K(\varepsilon, m)$. Примем теперь $k_1 = 1$ и, считая что $k_1, \ldots, k_{i-1}$ определены, подберем k_i так, чтобы

$$|V_{k_1}(x_{k_i})| < \frac{1}{2^i} y^*; \ \ldots; \ |V_{k_{i-1}}(x_{k_i})| < \frac{1}{2^i} y^*;$$

и

$$|V_{k_i}(x_{k1})| \leqslant \frac{y^*}{i2^i}; \ \ldots; \ |V_{k_i}(x_{k_{i-1}})| \leqslant \frac{y^*}{i2^i}.$$

Положим теперь $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_{k_i}$. Тогда

$$|V_{k_i}(x) - V_{k_i}(x_{k_i})| \leqslant \frac{y^*}{2^{i-1}},$$

и потому, так как $V_{k_i}(x_{k_i})$ не $\to 0\,(t)$, то и $V_{k_i}(x)$ не $\to 0\,(t)$, вопреки вышесказанному.

Замечание. Для случая (o)-ограниченности теорема, аналогичная теореме 4, вообще говоря, не верна. Она верна (и тривиальна), если операции U_n положительны.

*) Доказательство аналогичной теоремы для пространств Banach'a основано на том, что Y — пространство 2-ой категории в себе. Для пространств типа S_6 я могу установить последнее обстоятельство лишь при дополнительном предположении, что имеется исчислимое множество, плотное во всем пространстве.