Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Е. ЛЕОНТОВИЧ и А. МАЙЕР

О ТРАЕКТОРИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ КАЧЕСТВЕННУЮ СТРУКТУРУ РАЗБИЕНИЯ СФЕРЫ НА ТРАЕКТОРИИ

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 2 I 1937)

Настоящая работа является непосредственным обобщением некоторых свойств так называемых «Грубых систем» (1) на некоторый, в известном смысле более общий, класс дифференциальных уравнений. Устанавливается, что и для этого более общего класса дифференциальных уравнений существует конечное число траекторий, полностью определяющих качественную структуру. При этом роль, совершенно аналогичную устойчивости по Ляпунову, играет здесь так называемая орбитная устойчивость, которая является естественным обобщением обычной временной устойчивости по Ляпунову.

Мы рассматриваем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \tag{A}$$

где $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — многочлены, не имеющие общих множителей. С помощью стереографической проекции мы отображаем траектории на сферу. Пусть S—северный полюс сферы (центр проекций).

Всюду в дальнейшем, когда мы будем говорить о расстояниях, мы будем подразумевать сферические расстояния (измеряемые с помощью больших кругов). Точку S мы всегда будем причислять к состояниям равновесия системы (A).

Определение I. Пусть на траектории L, $M = f(t - t_0, M)$, взята точка M_1 (соответствующая $t = t_1$).

Мы назовем траекторию L $\omega(\alpha)$ орбитно устойчивой в точке M_1, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что всякая траектория, проходящая при $t = \tau$ через какую-либо точку δ-окрестности точки M_1, при всех значениях $t \geqslant \tau$ $(t \leqslant \tau)$ не выйдет из ε-окрестности полутраектории L, соответствующей $t \geqslant t_1$ $(t \leqslant t_1)$.

Определение II. Если траектория L $\omega(\alpha)$ орбитно устойчива во всех своих точках, то мы назовем ее $\omega(\alpha)$ орбитно устойчивой.

Теорема I. *Если траектория $\omega(\alpha)$ орбитно устойчива, хотя бы в одной своей точке M_1, то она $\omega(\alpha)$ орбитно устойчива и во всякой другой своей точке.*

Траекторию, и ω и α орбитно устойчивую, мы будем называть просто орбитно устойчивой. Всякую траекторию, не являющуюся орбитно устойчивой, и точку S будем называть **орбитно неустойчивыми траекториями***.

Нижеследующие предложения устанавливают возможные типы орбитно устойчивых и орбитно неустойчивых траекторий.

Лемма I. Всякая траектория, являющаяся ω (α) предельной, хотя бы для одной отличной от нее самой траектории, α (ω) орбитно неустойчива.

Лемма II. Незамкнутая траектория, имеющая среди своих ω (α) предельных точек не только состояния равновесия и точку S, ω (α) орбитно устойчива.

Лемма III. Если ω (α) орбитно неустойчивая траектория имеет только одну ω (α) предельную точку, то она вместе с некоторой другой траекторией образует «характеристику, пересекающую особую точку» (traversant le point singulier) в смысле Бендиксона [2].

Лемма IV. Если в любой окрестности замкнутой траектории L есть замкнутые траектории, то L ω (α) орбитно устойчива.

Теорема II. *Среди траекторий системы* (А) *существует лишь конечное число орбитно неустойчивых траекторий.*

Теорема вытекает из известных результатов Бендиксона [2] и Дюлака [3] и предыдущих лемм.

Следствие. Для системы (А) множество точек орбитно неустойчивых траекторий замкнуто.

Теорема III. *Множество точек сферы, принадлежащих орбитно устойчивым траекториям, распадается на конечное число областей.*

Мы будем называть в дальнейшем эти области **компонентами**. Свойства компонент устанавливаются следующими предложениями:

Лемма V. Вокруг каждой точки незамкнутой ω (α) орбитно устойчивой траектории L существует такая δ-окрестность, что все пересекающие эту δ-окрестность траектории незамкнуты и имеют те же ω (α) предельные точки, что и L [и ω (α) орбитно устойчивы].

Лемма VI. Вокруг каждой точки (и ω и α) орбитно устойчивой замкнутой траектории существует такая δ-окрестность, что все пересекающие эту окрестность траектории замкнуты и одна лежит внутри другой.

Теорема IV. *Если внутри одной компоненты существует хоть одна замкнутая траектория, то и все траектории внутри этой компоненты замкнуты, и одна лежит внутри другой.*

* Заметим, что понятие ω (α) орбитной устойчивости находится в известной связи с понятием ω (α) регулярных точек, введенным Биркгофом при рассмотрении преобразований поверхности самое в себя [4]. Это последнее понятие может быть естественным образом перенесено на рассматриваемый нами случай в следующем виде. Пусть N—множество всех предельных точек всех траекторий сферы и пусть G—открытое множество, состоящее из точек сферы, не входящих в N. Пусть σ—некоторая область (связная), целиком (вместе с границами) лежащая в G. Рассмотрим всевозможные движения:

$$P = f(t - t_0,\ P_0),$$

где P_0—какая угодно точка σ. Область σ называется ω (α) регулярной, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое не зависящее от выбора точки P_0 внутри σ число $T > 0$ ($T < 0$), что точка $P = f(\tau, P_0)$ будет находиться внутри ε-окрестности N при всех значениях $\tau > T$ ($\tau < T$). Точки такой области σ называются ω (α) регулярными точками. Нетрудно видеть из дальнейшего, что для случая системы (А) все точки незамкнутых орбитно устойчивых траекторий будут ω и α регулярны. Для более сложных, чем даваемые системой (А) структур разбиения сферы на траектории это уже не будет справедливо. С другой стороны, точки ω (α) орбитно неустойчивых траекторий могут быть ω (α) регулярны.

Теорема V. *Если траектории одной и той же компоненты незамкнуты, то они имеют одни и те же* ω *и* α *предельные точки* *.

Пусть G—какая-нибудь компонента. Предположим, что она n-связна и обозначим через $k_1, k_2, \dots, k_n$ континуумы, составляющие ее границы.

Лемма VII. Если траектории компоненты G незамкнуты, то на каждом континууме k_i лежит хотя бы одна ω или α предельная точка этих траекторий.

Лемма VIII. Между двумя замкнутыми траекториями одной и той же компоненты не лежит ни одной орбитно неустойчивой траектории.

Теорема VI. *Всякая компонента не более чем двусвязна***.

Пусть мы имеем две системы дифференциальных уравнений типа (А), причем траектории одной из этих систем изображены на сфере B_1, а другой—на сфере B_2.

Качественная структура траекторий на сферах B_1 и B_2 одинакова, если существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное преобразование T сферы B_1 в сферу B_2, переводящее всякую траекторию на B_1 в траекторию на B_2.

Нижеследующая теорема позволяет утверждать, что в случае системы типа (А) качественная структура траекторий определяется конечным числом траекторий.

Теорема VII. *Качественная структура траекторий на сферах* B_1 *и* B_2 *одинакова в том и только в том случае, если существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное преобразование* T_1 *сферы* B_1 *в сферу* B_2, *при котором:* 1) *каждая орбитно неустойчивая траектория сферы* B_1 *переходит в орбитно неустойчивую траекторию сферы* B_2, *и наоборот;* 2) *по крайней мере одна орбитно устойчивая траектория каждой компоненты на* B_1 *переходит в орбитно устойчивую траекторию соответствующей по преобразованию* T_1 *компоненты на* B_2.

Доказательство этой теоремы опирается на целый ряд лемм, уточняющих характер границ компонент. Основная идея его заключается в построении преобразования T (взаимно-однозначного, взаимно-непрерывного и переводящего каждую траекторию в траекторию же) для каждой компоненты в отдельности (с помощью дуг однократного пересечения, пересекающих все траектории данной компоненты), причем на орбитно неустойчивых траекториях сохраняется соответствие, определенное преобразованием T_1, что обеспечивает непрерывность и взаимно-однозначность преобразования этой сферы B_1 в сферу B_2.

Таким образом в случае системы (А) конечное число траекторий (конечное число орбитно неустойчивых плюс конечное число орбитно устойчивых), точки которых образуют в своей совокупности замкнутое множество, полностью определяет качественную структуру разбиения сферы на траектории. Возникает вопрос, является ли это число наименьшим числом траекторий (образующих замкнутое точечное множество), определяющих качественную структуру этого разбиения. Можно построить

---

* Вопросом разбиения сферы на области, заполненные траекториями в некотором смысле сходного поведения, для очень общего случая (для случая непрерывного векторного поля на сфере с конечным числом особых точек) занимался Брауэр ([5]), Если классификацию областей, данную Брауэром, приложить к рассматриваемому нами элементарному случаю, то отдельные области (régions) Брауэра, вообще говоря, будут состоять из нескольких компонент. Брауэр не ставил вопросов о траекториях, определяющих топологическую структуру разбиения сферы на траектории.

** Аналогичная теорема доказана Биркгофом для областей, заполненных ω (α) регулярными точками.

как примеры того случая, когда это число траекторий является наименьшим, так и того случая, когда это число не является наименьшим.

Физико-технический институт Университета.
Горький.

Поступило
2 I 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Андронов и Л. Понтрягин, ДАН, настоящий номер. [2] I. Bendixson, Acta Mathem., 24, 1 (1901). [3] H. Dulac, Bul. de la Société Math. de France, 51, 45 (1923). [4] G. Birkhoff et P. Smith, J. de Mathématiques, VII, 345 (1928). [5] L. Brouwer, Proceedings Acad. Wetensch. Amsterdam., XI, 850 (1908); XII, 716 (1909); XIII, 171 (1910).