Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 5

МАТЕМАТИКА

А. АНДРОНОВ и Л. ПОНТРЯГИН

ГРУБЫЕ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 2 I 1936)

Рассмотрим динамическую систему, определяемую двумя уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{A}$$

где x и y—декартовы координаты на плоскости и где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$—аналитические функции для всех рассматриваемых значений переменных x и y.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением таких систем вида (A), для которых существует так называемый «цикл без контакта», т. е. такая простая замкнутая кривая g с непрерывно вращающейся касательной, что все траектории, проходящие через точки этой кривой, ее пересекают и ни одна траектория не касается. Областью G назовем область плоскости внутри кривой g. Без ограничения общности мы можем предположить, что фазовые траектории, пересекающие кривую g, входят внутрь области G с возрастанием времени t.

Рассмотрим наряду с системой (A) измененную систему:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y), \tag{B}$$

где $p(x, y)$ и $q(x, y)$—также аналитические функции для всех рассматриваемых значений переменных x и y.

Определение I. Систему (A) мы будем называть «грубой» (в отличие от систем «не грубых») в данной области G, если для всякого $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что при произвольных аналитических $p(x,y)$ и $q(x,y)$, удовлетворяющих в области G условиям

$$|p(x, y)| < \varepsilon, \quad |q(x, y)| < \varepsilon;$$
$$|p'_x(x, y)| < \varepsilon, \quad |p'_y(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_x(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_y(x, y)| < \varepsilon,$$

существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное преобразование T области G самое в себя, при котором: 1) соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем η; 2) точкам, лежащим на одной и той же траектории системы (A), соответствуют точки, лежащие на одной и той же траектории системы (B) и обратно*.

Необходимые условия грубости системы (A) в области G могут быть сформулированы в виде следующих трех предложений.

Теорема I. *Если система* (A) *грубая в области* G, *то в области* G *система* (A) *может иметь только такие состояния равновесия, для которых действительные части корней соответствующего характеристического уравнения отличны от нулей.* Или иначе: в области G система (A) не может иметь состояний равновесия $x=x_0$, $y=y_0$,

а) для которых $\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$

б) для которых при $\Delta > 0$ $\sigma = -[P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)] = 0.$

Теорема II. *Если система* (A) *грубая в области* G, *то в области* G *система* (A) *может иметь только такие периодические движения, для которых характеристический показатель не равен нулю.* Или иначе: в области G система (A) не может иметь периодических движений $x = = \varphi(t)$, $y = \psi(t)\,[\varphi(t+\tau) = \varphi(t);\ \psi(t+\tau) = \psi(t)]$, для которых

$$h = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)]\,dt = 0.$$

Теорема III. *Если система* (A) *грубая в области* G, *то в области* G *система* (A) *может иметь только такие сепаратрисы* (*усы седла*), *которые не идут из седла в седло.* Или иначе: в области G система (A) не может иметь сепаратрис, идущих из седла в седло.

Мы будем говорить, что система (A) удовлетворяет в области G условиям Г, если система (A) имеет внутри цикла без контакта g:

1) лишь такие состояния равновесия, для которых $\Delta \neq 0$, и если $\Delta > 0$, то $\sigma \neq 0$;

2) лишь такие периодические траектории, для которых $h \neq 0$,

3) лишь такие сепаратрисы, которые не идут из седла в седло.

В силу известных результатов Бендиксона [3] система (A), удовлетворяющая в области G условиям Г, может иметь в области G траектории лишь следующих одиннадцати типов:

I. Состояния равновесия:	Узлы (фокусы) $[\Delta > 0,\ \sigma \neq 0]$.	1
	Седла $[\Delta < 0]$.	2
II. Предельные циклы	$[h \neq 0]$.	3

* Это определение грубости системы можно рассматривать как определение устойчивости совокупности траекторий динамической системы по отношению к достаточно малым изменениям правых частей уравнений (A). Устойчивость такого рода представляет интерес для физики. В частности требование устойчивости периодических движений по отношению к достаточно малым изменениям правых частей системы (A) было высказано и использовано одним из авторов [1] при доказательстве утверждения, что лишь предельные циклы могут отображать в системах вида (A) реальные автоколебательные процессы.

В этой связи следует отметить, что H. Боль [2] дал существенно иное, относящееся к движениям изображающих точек по траекториям определение устойчивости динамической системы по отношению к малым изменениям правых частей уравнений. Такая устойчивость в смысле Боля накладывает исключительно тяжелые требования на исходную систему. Например исходная система вида (A) может быть устойчивой по Болю только в том случае, если в области G имеется лишь одно состояние равновесия и если все остальные движения стремятся при $t \to +\infty$ к этому состоянию равновесия.

III. Сепаратрисы:	Выходящие из узла (фокуса) или стремящиеся к узлу (фокусу).	4
	Сворачивающиеся с предельного цикла или стремящиеся к предельному циклу.	5
	Входящие в область G.	6
IV. Траектории, имеющие в качестве своих предельных траекторий лишь узлы (фокусы) и предельные циклы, расположенные в области G:	Выходящие из узла (фокуса) и стремящиеся к узлу (фокусу).	7
	Сворачивающиеся с предельного цикла и стремящиеся к предельному циклу.	8
	Выходящие из узла (фокуса) и стремящиеся к предельному циклу (или обратно).	9
V. Траектории, входящие в область G и не являющиеся сепаратрисами:	Стремящиеся к узлу (фокусу).	10
	Стремящиеся к предельному циклу.	11

Определение II. Траектория называется положительно (отрицательно) устойчивой по Ляпунову в области G(⁴), если, какова бы ни была ее точка M_0 $(M_0 \subset G)$, соответствующее движение $M = \varphi(t - t_0, M_0)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1) при всех $t > t_0 [t < t_0]$ $M \subset G$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta(\varepsilon, M_0)$, что при всех $t > t_0$ $[t < t_0]$ $\rho[\varphi(t - t_0, M_0), \varphi(t - t_0, M_0')] < \varepsilon$, коль скоро $\rho[M_0, M_0'] < \delta$.

Траектория называется положительно (отрицательно) неустойчивой по Ляпунову в области* G, если она удовлетворяет условию 1) и не удовлетворяет условию 2).

Определение III. Траектория называется особой, если она положительно или отрицательно неустойчива по Ляпунову.

Траектория называется обыкновенной, если она

1) либо положительно и отрицательно устойчива по Ляпунову,

2) либо положительно устойчива по Ляпунову и выходит из области G при $t \to -\infty$.

Теорема IV. *Для системы* (A), *удовлетворяющей в области* G *условиям* Γ, *траектории типа* I, II, III *особые, все остальные траектории в области* G *обыкновенные.*

Теорема V. *В динамической системе* (A), *для которой в области* G *выполнены условия* Γ, *множество особых траекторий разбивает область* G *на конечное число связных компонент («ячеек»), заполненных обыкновенными траекториями**. Эти компоненты разделяются на два класса: на класс компонент, примыкающих к циклу без контакта* g, *и на класс внутренних компонент. В каждой внутренней компоненте любая траектория положительно и отрицательно устойчива по Ляпунову; каждая такая компонента имеет в составе границы одну положительно устойчивую по Ляпунову особую траекторию, являющуюся «элементом притяжения», или «стоком», и одну отрицательно устой-*

* В дальнейшем для краткости мы будем опускать слова «в области G».

** Заметим, что существует лишь конечное число возможных топологических типов ячеек, рассматриваемых вместе с их границами.

чивую по Ляпунову особую траекторию, являющуюся «элементом отталкивания», или «источником».

В каждой компоненте, примыкающей к циклу без контакта, любая траектория положительно устойчива по Ляпунову; каждая такая компонента имеет в составе границы одну положительно устойчивую по Ляпунову особую траекторию, являющуюся стоком.

Пусть мы имеем две динамических системы типа (A), (A_1) и (A_2) и соответственно два разбиения фазовой плоскости на траектории S_1 и S_2, причем пусть в соответствующих областях G_1 и G_2 выполнены условия Г.

Мы будем говорить, что качественные структуры разбиений фазовой плоскости на траектории S_1 и S_2 одинаковы в областях G_1 и G_2, если существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное преобразование T плоскости в плоскость, переводящее область G_1 в область G_2, при котором точкам области G_1, лежащим на одной и той же произвольной траектории разбиения S_1, соответствуют точки области G_2, лежащие на одной и той же траектории разбиения S_2, и наоборот.

Нижеследующая теорема позволяет утверждать, что в системах вида (A), для которых в соответствующих областях G выполнены условия Г, качественная структура разбиения этих областей на траектории определяется особыми траекториями, направлением движения по замкнутым особым траекториям и характером устойчивости предельных особых траекторий.

Теорема VI. *Качественные структуры разбиений* S_1 и S_2, *для которых внутри соответствующих циклов без контакта выполнены условия* Г, *одинаковы в областях* G_1 и G_2 *в том и только в том случае, если существует взаимно-непрерывное и взаимно-однозначное преобразование* T_1 *плоскости в плоскость, переводящее область* G_1 *в область* G_2, *при котором точкам области* G_1, *лежащим на одной и той же (любой) особой траектории разбиения* S_1, *соответствуют точки области* G_2, *лежащие также на одной и той же особой траектории разбиения* S_2, *и наоборот, причем:* 1) *всем источникам и стокам соответствуют опять источники и стоки (или всем, наоборот,—стоки и источники);* 2) *направление вращения (по времени) на всех соответственных замкнутых особых траекториях сохраняется (или переходит в противоположное).*

В условии этой теоремы пункты 1) и 2) можно заменить следующим требованием: в каждой компоненте разбиения S_1 существует обыкновенная траектория, точки которой при преобразовании T_1 переходят в точки одной и той же обыкновенной траектории соответствующей компоненты разбиения S_2, и наоборот.

Достаточные условия грубости системы (A) в области G формулируются в виде следующей теоремы:

Теорема VII. *Если система* (A) *удовлетворяет в области* G *условиям* Г, *то такая система является грубой в области* G.

Очевидно, что грубые системы существуют.

Теоремы IV, V, VI, относящиеся к системам вида (A), удовлетворяющим в соответствующих областях G условиям Г, могут быть сформулированы непосредственно для систем вида (A), грубых в соответствующих областях G.

Институт физики и Институт математики
Московского государственного университета.

Поступило
2 I 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Andronow, C. R., **189**, 559 (1929). [2] P. Bohl, J. f. reine u. angew. Mathem., **144**, 284 (1914). [3] I. Bendixson, Acta Mathem., **24**, 1 (1901). [4] A. Markoff, Math. ZS., **36**, 708 (1933).