Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 5

ФИЗИКА

В. А. ФОК, член-корреспондент Академии Наук СССР

ОБ АМПЛИТУДАХ БОЗЕ В НЕЙТРИННОЙ ТЕОРИИ СВЕТА

1. Введение

В нашей заметке о невозможности построения нейтринной теории света (1) мы указывали на следующие два обстоятельства: 1) противоречие нейтринной теории света принципу наложения и 2) невозможность выразить амплитуды Бозе через амплитуды Ферми. Наша критика встретила ряд возражений (2, 3). В этих возражениях наиболее существенный вопрос о противоречии принципу наложения не затрагивается; сущность же их сводится к указанию, что если ввести кроме нейтрин еще и антинейтрины («дырки» в распределении нейтрин с отрицательной энергией), то построить операторы, удовлетворяющие соотношениям Иордана и Кронига, все-таки можно. Соглашаясь с этим указанием, мы не можем однако согласиться с тем, что построение этих операторов решает задачу о выражении амплитуд Бозе через амплитуды Ферми и что оно устраняет заложенные в нейтринной теории света противоречия. Поэтому нам представляется целесообразным рассмотреть затронутые здесь вопросы несколько подробнее.

2. О предельных условиях для операторов вторичного квантования

При рассмотрении систем, состоящих из неопределенного числа частиц, приходится пользоваться методом так называемого вторичного квантования. Операторы вторичного квантования, как и всякие операторы, приобретают однозначный смысл лишь после того, как те функции, на которые они действуют, подчинены определенным предельным условиям.

К этим предельным условиям относится и требование, чтобы полное число физических частиц было конечным; другими словами, чтобы вероятность того, что число таких частиц превышает N, стремилась к нулю с бесконечным возрастанием N. Мы говорим здесь о физических частицах, чтобы охватить также и случай дираковской теории дырок. В этой теории частицы с отрицательной энергией не считаются, как известно, физическими, реально существующими частицами, а являются фиктивными; физическими же частицами считаются «дырки» в распределении фиктивных частиц с отрицательной энергией и кроме того конечно частицы с положительной энергией. Таким образом мы должны положить в теории дырок: $N =$ (число дырок) $+$ (число частиц с положительной энергией), тогда как в обычной теории N равно полному числу частиц. Отсюда ясно, что в дираковской теории дырок предельные условия будут иными, чем в обычной теории. Вследствие этого и перестановочные соотношения для операторов могут в этих двух теориях получиться неодинаковыми.

Если ввести для физических частиц конфигурационное пространство, то условие, согласно которому число их должно оставаться конечным, будет выполняться автоматически. Поэтому с точки зрения строгости выводов представление операторов вторичного квантования в конфигурационном пространстве является наиболее удовлетворительным.

3. Перестановочные соотношения для операторов нейтринной теории света

В нейтринной теории света основную роль играет оператор

$$L(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^+ (\alpha)\gamma(\nu + \alpha)\, d\alpha, \tag{1}$$

где величины $\gamma(\alpha)$ удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \gamma(\nu)\gamma^+(\mu) + \gamma^+(\mu)\gamma(\nu) &= \delta(\mu - \nu), \\ \gamma(\nu)\gamma(\mu) + \gamma(\mu)\gamma(\nu) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Мы будем разуметь под $L(\nu)$ тот оператор вида (1), который соответствует предельным условиям обычной теории, т. е. конечному числу нейтрин. Для нейтрин можно ввести тогда конфигурационное пространство. Представление операторов вида: $\gamma(\nu)$, $\gamma^+(\nu)$ и $L(\nu)$, в конфигурационном пространстве подробно изложено нами в нашей статье [4], посвященной этому вопросу. Из свойств этого представления вытекает, как уже было указано в нашей заметке [1], коммутативность оператора $L(\nu)$ с $L(\mu)$ и с сопряженным оператором $L^+(\mu)$ для всех значений ν и μ. Таким образом в случае конечного числа нейтрин

$$L(\nu)L^+(\mu) - L^+(\mu)L(\nu) = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь предельные условия, соответствующие дираковской теории дырок. Оператор [1] для этих предельных условий мы будем обозначать символом $K(\nu)$. Это будет, строго говоря, некоторый **новый** оператор; мы его будем называть оператором Иордана.

Мы имеем теперь дело с нейтринами и антинейтринами и можем применить математический аппарат, разработанный в нашей статье о позитронах [5]. Введем вместо $\gamma(\alpha)$ новую квантованную функцию $\varphi(\alpha, \varepsilon)$, определенную для положительных значений параметра α, играющего роль энергии, и для значений величины ε, равных ± 1, причем $\varepsilon = +1$ означает, что данная частица есть нейтрино, а $\varepsilon = -1$, что она есть антинейтрино. Положим, для положительных α,

$$\varphi(\alpha, 1) = \gamma(\alpha); \quad \varphi(\alpha, -1) = \gamma^+(-\alpha). \tag{4}$$

Перестановочные соотношения $\varphi(\alpha, \varepsilon)$ напишутся:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\alpha, \varepsilon)\varphi^+(\alpha', \varepsilon') + \varphi^+(\alpha', \varepsilon')\varphi(\alpha, \varepsilon) &= \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta(\alpha - \alpha') \\ \varphi(\alpha, \varepsilon)\varphi(\alpha', \varepsilon') + \varphi(\alpha', \varepsilon')\varphi(\alpha, \varepsilon) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если выразить в интеграле (1) $\gamma(\alpha)$ через $\varphi(\alpha, \varepsilon)$, то после изменения порядка множителей и отбрасывания члена, содержащего бесконечно большую постоянную, умноженную на $\delta(\nu)$, он может быть написан в виде:

$$K(\nu) = G(\nu) + U(\nu), \tag{6}$$

где

$$G(\nu) = \int_0^\infty \varphi^+(\alpha, 1)\varphi(\alpha+\nu, 1)\,d\alpha - \int_0^\infty \varphi^+(\alpha, -1)\varphi(\alpha+\nu, -1)\,d\alpha, \tag{7}$$

$$U(\nu) = \int_0^\nu \varphi(\nu-\alpha, -1)\varphi(\alpha, 1)\,d\alpha. \tag{8}$$

В этих формулах, как и в дальнейших, величина ν предполагается положительной. Если воспользоваться известным[4] представлением операторов $\varphi(\alpha, \varepsilon)$ и $\varphi^+(\alpha, \varepsilon)$ в конфигурационном пространстве, можно получить такое представление и для операторов $G(\nu)$ и $U(\nu)$, а значит и для $K(\nu)$. Вычисления здесь подобны тем, какие выполнены в нашей статье о позитронах[5]. Пользуясь этим представлением, можно совершенно строго вывести перестановочные соотношения:

$$K(\nu)K^+(\mu) - K^+(\mu)K(\nu) = \mu\delta(\mu-\nu). \tag{9}$$

Таким образом для конечного числа нейтрин имеют место соотношения (3), а для конечного числа антинейтрин и нейтрин с положительной энергией имеют место соотношения (9).

4. Амплитуды Бозе и операторы Иордана

В предыдущем параграфе мы показали, что если ввести кроме нейтрин еще и антинейтрины, то можно построить такие операторы [а именно $K(\nu)$], которые будут удовлетворять соотношениям (9), т. е. перестановочным соотношениям Иордана и Кронига. Но это еще не значит, что задача о выражении амплитуд Бозе через амплитуды Ферми решена.

Рассмотрим несколько подробнее те условия, которым должны удовлетворять амплитуды Бозе для световой волны. Состояние светового кванта характеризуется, как известно, его волновым вектором и поляризацией. Обозначим совокупность переменных, соответствующих этим степеням свободы светового кванта, буквой k. В квантовой электродинамике световое поле может быть описано при помощи последовательности волновых функций, которые зависят от переменных $k_1, k_2, \ldots$, относящихся к разным световым квантам, и не зависят ни от каких других переменных. От той же переменной k зависит, как от параметра, и амплитуда Бозе $b(k)$.

Таким образом в *амплитуде Бозе должны фигурировать все те и только те степени свободы, которые входят в волновые функции.*

Вследствие этого амплитуды Бозе $b(k)$ и сопряженные с ними величины $b^+(k)$ образуют *замкнутую систему операторов* в том смысле, что всякий коммутирующий с ними оператор пропорционален единичному оператору, т. е. сводится к умножению на число.

В нейтринной же теории света амплитуд Бозе, удовлетворяющих этому условию, построить нельзя. Если мы положим например, следуя Иордану и Кронигу, $b(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} K(\nu)$, то эти амплитуды будут зависеть только от параметра ν, тогда как волновые функции, на которые они действуют, будут зависеть кроме ν также и от ε (напомним, что $\varepsilon = +1$ означает, что частица есть нейтрино, и $\varepsilon = -1$, что она есть антинейтрино). Вследствие этого могут существовать операторы, коммутирующие со всеми $b(\nu)$ и $b^+(\nu)$, но не сводящиеся к умножению на число. Таким будет например оператор $K(0)$ для разности между числом нейтрин и числом антинейтрин.

Если же мы откажемся от требования замкнутости системы амплитуд Бозе, то мы столкнемся с затруднением противоположного характера: окажется, что незамкнутую систему амплитуд можно построить различными способами. Наличие добавочной переменной ε влечет за собой неоднозначность в выборе выражения для $b(\nu)$ через $K(\nu)$; вместо $\sqrt{\nu}\, b(\nu) = K(\nu)$ можно было бы взять например $\sqrt{\nu}\, b(\nu) = K(\nu) - K(0)$.

Физическая причина всех этих затруднений заключается в том, что та степень свободы, которая соответствует превращению частицы из нейтрино в антинейтрино, в природе никак не проявляется.

В самом деле, в чем состоит разница между нейтрино и антинейтрино? Ни те, ни другие частицы не имеют заряда, а их масса и спин предполагаются одинаковыми, поэтому их нельзя было бы отличить друг от друга, даже если и можно было бы их наблюдать (чего пока не удалось). Согласно основным идеям квантовой механики физически неразличимые объекты должны считаться тождественными. Если уже необходимо ввести формальное различие между такими объектами (например между двумя системами, отличающимися друг от друга перестановкой двух электронов), то оно не должно отражаться на вероятностях и математических ожиданиях. Между тем в нейтринной теории света вводится физически ненаблюдаемая степень свободы (переменная ε), и все величины: волновые функции, вероятности и математические ожидания, существенно зависят от значений, принимаемых переменной ε. Поэтому нейтринная теория света и в этом отношении не удовлетворяет основным требованиям квантово-механического описания.

Физический институт им. П. М. Лебедева.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
19 IV 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Фок, ДАН, IV (XIII), № 5 (109), 221 (1936). [2] E. Stueckelberg, Nature, **139**, 198 (1937). [3] Nagendra Nath, Nature, **139**, 331 (1937). [4] V. Fock, ZS. f. Phys. **75**, 622 (1932). [5] В. А. Фок, ДАН, нов. сер. № 6, 265 (1933).