Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 5

МАТЕМАТИКА

А. БОБРОВ

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СУММ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 31 III 1937)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — последовательность взаимно независимых случайных величин, принимающих только положительные значения. Назовем, следуя А. Я. Хинчину, суммы $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ относительно устойчивыми, если можно подобрать такие положительные числа B_n, что для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{s_n}{B_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Очевидно относительная устойчивость есть непосредственное обобщение закона больших чисел.

А. Я. Хинчин дал простое необходимое и достаточное условие для относительной устойчивости сумм величин, подчиняющихся одному и тому же закону распределения вероятностей. Автором получено почти столь же простое необходимое и достаточное условие относительной устойчивости в общем случае; при этом относительно величин x_k делается лишь естественное дополнительное допущение о так называемой пренебрегаемости их в пределе: именно, величины x_k называются пренебрегаемыми в пределе, если для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\frac{x_k}{B_n} > \varepsilon\right) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

равномерно относительно $k \leqslant n$.

Аналогичным понятием пользовался W. Feller, справедливо утверждающий, что только суммы пренебрегаемых в пределе величин образуют естественную область асимптотических исследований (1).

Обратимся к теореме:

Для того чтобы суммы s_n были относительно устойчивыми и величины x_k пренебрегаемыми в пределе, необходимо и достаточно, чтобы *существовала последовательность чисел* $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, *для которой выполняется соотношение:*

$$\lim_{(n\to\infty)} \sum_{k=1}^{n} \chi_k(C_n) = 0, \quad \lim \sum_{k=1}^{n} \overline{\chi}_k(C_n) = \infty,$$

где

$$\chi_k(x) = 1 - F_k(x), \quad \overline{\chi}_k(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \chi_k(\alpha)\, d\alpha$$

и $F_k(x)$ — функция распределения величины x_k.

Обозначая через $C_n(\delta)$ наименьшее число, для которого $\sum_{k=1}^{n} \chi_k[C_n(\delta)] \leqslant \delta$, можно заменить только что сформулированное условие следующим: для любого $\delta > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\chi}_k[C_n(\delta)] \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Институт математики
Московского государственного университета.

Поступило
31 III 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Feller, Math. ZS., **40**, 521—559 (1935).