Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 5

МАТЕМАТИКА

Л. ЛЮСТЕРНИК

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 26 III 1937)

Пусть $F(x, y, y')$ — функция однородная четной степени $2k$ относительно аргументов y и y', непрерывная, обладающая частными производными достаточно высоких порядков. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx.$$

Изопериметрическая задача

$$\delta J(y) = 0$$

при условиях:

$$\int_a^b y^{2k}\,dx = 1, \quad y(a) = y(b) = 0, \tag{1}$$

приводит к уравнению

$$\frac{1}{2k}\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) = \lambda y^{2k-1} \tag{2}$$

(λ — изопериметрическая постоянная).

При

$$F = Ry'^2 Py^2$$

уравнение (2) перейдет в обычное уравнение Штурма-Лиувилля. Будем в дальнейшем полагать $F_{y'y'} \geqslant 0$, причем $F_{y'y'} = 0$ лишь в случае порядка однородности $2k$ выше 2-го, если одновременно $y = y' = 0$.

Сохраним терминологию теории уравнений Штурма-Лиувилля: числа λ, при которых уравнение (2) имеет решение с краевыми условиями: $y(a) = y(b) = 0$, не тождественно равное нулю, будем называть собственными значениями, а соответственные решения — собственными функциями. Вследствие однородности уравнения (2) вместе с $y(x)$, собственной функцией, и $ty(x)$, при любой константе t, нормированной собственной функцией $y(x)$ будем называть такую, для которой $\int_a^b y^{2k}\,dx = 1$.

Для уравнений типа (2) переносятся почти все основные факты теории уравнений Штурма-Лиувилля, как то: существование счетной последовательности вещественных собственных значений, порядок их асимптотического роста, осцилляционная теорема, теорема Штурма о перемежаемости нулей двух решений, теорема Якоби об условии положительности функционала $J(y)$, теорема о числе отрицательных собственных значений.

Лемма 1. *Если $y(x)$ есть нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению λ, то*

$$J(y) = \lambda.$$

Лемма 2. *Будем обозначать через $z_\lambda(x)$ любое решение уравнения*

$$F_2 - \frac{d}{dx} F_{z'} = \lambda z.$$

Если для $x = c$, $z_\lambda(c) = z'_\lambda(c) = 0$, то $z_\lambda(x) \equiv 0$.

Отсюда следует единственность нормированной собственной функции, отвечающей данному собственному значению λ, и единственность кривой $y = z_\lambda(x)$, выходящей из данной точки по данному направлению.

Лемма 3. *Для каждой положительной константы l существует положительная константа l_1 такая, что при $|x_0 - x_1| < l_1$ через произвольную пару точек $A(x_0, y_0)$ и $A(x_1, y_1)$ проходит и притом единственная кривая $y = z_\lambda(x)$ для любого λ, если $0 \leqslant \lambda \leqslant l$.*

Лемма 4. *Сохраняя обозначения предыдущей леммы, обозначим через $\varphi(\lambda)$ значение $\int\limits_{x_0}^{x_1} z_\lambda^2\, dx$, где $y = z_\lambda(x)$ проходит через заданные точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$; функция $\varphi(\lambda)$ есть монотонно убывающая функция на интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant l$, за исключением случая $y_0 = y_1 = 0$, когда $\varphi(\lambda) \equiv 0$.*

Лемма 5. *Функционал $J(y)$ при условиях (1) ограничен снизу.* Будем обозначать через λ_0 нижнюю границу функционала $J(y)$ при условиях (1).

Теорема 1. *λ_0 есть собственное значение.*

В силу леммы 5 существует минимизирующая последовательность $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющая уравнениям (1), для которых $\lim\limits_{k\to\infty} J(y_k) = \lambda_0$.

Пользуясь леммами 2—4, можно построить другую минимизирующую последовательность $\bar{y}_k(x)$, где каждая кривая $y = \bar{y}_k(x)$ состоит из конечного числа дуг кривых $y = z_\lambda(x)$ с фиксированными абсциссами концов и ограниченными λ. Из последовательности $\bar{y}_k(x)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к функции $y_0(x)$, для которой $J(y_0) = \lambda_0$. Нетрудно убедиться, что $y_0(x)$ есть нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению λ_0.

Из леммы (1) следует: λ_0 есть наименьшее собственное значение.

Теорема 2. *Собственная функция $y_0(x)$, отвечающая наименьшему собственному значению λ_0, не обращается в нуль внутри интервала (a, b).*

Теорема 3 (обратная). *Собственная функция, не обращающаяся в нуль внутри интервала (a, b), отвечает наименьшему собственному значению λ_0.*

Лемма 6. *Будем предполагать пределы* (a, b) *в интеграле* $J(y) = \int_a^b F\,dx$ *переменными. Наименьшее собственное значение* λ_0 *обращается в функцию* a *и* b: $\lambda_0 = \lambda_0(a, b)$. При фиксированном a, $\lambda_0(a, b)$ есть монотонно убывающая функция b, при фиксированном b, $\lambda_0(a, b)$ есть монотонно возрастающая функция $a\,[a < b]$.

Лемма 7. *Пусть* $a_0 < a < b < b_0$; *существуют четыре константы* m_0, m_1, n_0, n_1, *где* $0 < m_0 < m_1$, *такие, что*

$$\frac{m_0}{(b-a)^{2k}} + n_0 \leqslant \lambda_0(a, b) \leqslant \frac{m_1}{(b-a)^{2k}} + m_0.$$

Из этих лемм следует, как в случае уравнения Штурма-Лиувилля:

Теорема 4 (Штурма). *Нули двух нетривиальных решений уравнения*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = \lambda y$$

перемежаются.

Будем называть уравнением Якоби уравнение

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Два нуля нетривиального решения этого уравнения будем называть друг другу сопряженными значениями.

Теорема 5 (Якоби). *Для того чтобы функционал* $J(y)$ [при условии $y(a) = y(b) = 0$] *был положителен, т. е. чтобы* $J(y) > 0$, *кроме случая* $y \equiv 0$, *необходимо и достаточно, чтобы закрытый справа интервал* (a, b) *не содержал значений, сопряженных с* a.

Теорема 6. *Существует счетная последовательность собственных значений:*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

Теорема 7. *Собственная функция* $y_k(x)$, *отвечающая собственному значению* λ_k, *обращается внутри интервала* (a, b) k *раз в нуль* (осцилляционная теорема).

Пусть $a < c < b$; при $c \to a$, $\lambda_0(a, c) \to +\infty$, при $c \to b$, $\lambda_0(c, b) \to +\infty$ (лемма 7), т. е. $\lambda_0(a, c) - \lambda_0(c, b)$ имеет противоположные знаки вблизи концов интервала (a, b); существует на интервале (a, b) значение c, при котором $\lambda_0(a, c) = \lambda_0(c, b) = \lambda_1$; λ_1 есть непосредственно следующее за λ_0 собственное значение; соответствующая собственная функция $y_1(x)$ обращается один раз в нуль. Повторяя подобные рассуждения, можно построить всю последовательность λ_n и $y_n(x)$, доказав теоремы 6 и 7.

Теорема 8. *Существуют четыре константы* k_0, k_1, l_0, l_1, *где* $0 < k_0 < k_1$, *такие, что*

$$k_0 n^{2k} + l_0 < \lambda_n < k_1 n^{2k} + l_1.$$

Эта теорема следует из теоремы (7) и леммы (7).

Теорема 9. *Разность между двумя смежными нулями функции* $y_n(x)$ *для любого* n *заключена между*

$$\frac{d}{n} \text{ и } \frac{d_1}{n},$$

где d *и* d_1 — *две положительные константы.*

Теорема 10. *Число отрицательных собственных значений λ_n совпадает с числом значений, сопряженных с a и расположенных внутри интервала (a, b).*

Теорема 11. *Среди нормированных собственных фунций $y_n(x)$ есть счетное множество линейно независимых.*

Эта теорема вытекает из равенства

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b y_k(x)\, y_n(x)\, dx = 0$$

при любом k.

Собственные значения λ_n можно определить топологически, как это сделано для случая однородности 2-го порядка в работе автора, напечатанной в Известиях Харьковского математического общества, № 34.

Поступило
26 III 1937.