Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 5

МАТЕМАТИКА

В. С. Игнатовский, член-корреспондент Академии Наук СССР

ПО ПОВОДУ ЛАПЛАСОВСКОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ. VIII

Как это мы уже указали в нашей заметке VI (1), мы можем аналогичным путем, как в указанной заметке, перейти к трем измерениям, т. е. к уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c_1\frac{\partial u}{\partial t}+a_1\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+mu=\varphi(x, y, z, t), \tag{1}$$

причем мы имеем в виду аналогичную проблему, как в заметке VI, т. е. граничная поверхность, на которой задаются краевые условия, есть плоскость YZ, справа от которой (положительные x) действительно уравнение (1). Таким образом будем иметь:

$$0<t<\infty;\ 0<x<\infty;\ -\infty<y<\infty;\ -\infty<z<\infty. \tag{2}$$

Мы применим поэтому двухстороннюю лапласовскую трансформацию относительно z, т. е.

$$\chi(x, y, \delta, t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta z}\, u(x, y, z, t)\, dz, \tag{3}$$

и получим таким образом из (1) уравнение подобного же типа, как в заметке VI, причем лишь вместо m будет стоять $m-\delta^2$. Таким образом заметка VI дает нам в нижнем пространстве решение проблемы, а последующий переход в верхнее пространство дает нам полное решение. Вместо четырех величин (2) и (3) заметки VI мы будем иметь здесь следующие четыре:

$$u(0, y, z, t)=u_0(y, z, t);\ \ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x}_{x\to 0}=h(y, z, t) \tag{4}$$

и

$$u(x, y, z, 0)=f(x, y, z);\ \ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}_{t\to 0}=F(x, y, z), \tag{5}$$

из которых лишь три могут быть заданы.

Решение в общем будет иметь форму:

$$u(x, y, z, t)=u_1(x, y, z, t)-\rho u_2(x, y, z, t), \tag{6}$$

где, как и прежде,

$$\rho=m-\frac{\mu^2}{c^2}+\nu^2. \tag{7}$$

Например мы получим в случае, если нам дано лишь $f(x, y, z)$ и $\mu = 0$,

$$u_1(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-ct}^{ct} e^{-\nu w}\,dw \int\limits_{-\sqrt{c^2t^2-w^2}}^{\sqrt{c^2t^2-w^2}} \frac{1}{\sqrt{c^2t^2-w^2-s^2}}\cdot \tag{8}$$

$$\cdot\left\{f(x-w, y-s, z-\sqrt{c^2t^2-w^2-s^2}) + f(x-w, y-s, z+\sqrt{c^2t^2-w^2-s^2})\right\}ds$$

$$x > ct$$

и

$$u_2 = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-ct}^{ct} e^{-\nu w}\,dw \int\limits_{-\sqrt{c^2t^2-w^2}}^{\sqrt{c^2t^2-w^2}} ds$$

$$\int\limits_{-\sqrt{c^2t^2-w^2-s^2}}^{\sqrt{c^2t^2-w^2-s^2}} \frac{f(x-w, y-s, z-\tau)I_1(\rho\sqrt{\tau^2-c^2t^2-w^2-s^2})\,d\tau}{\sqrt{\tau^2-c^2t^2-w^2-s^2}}. \tag{9}$$

$$x > ct.$$

Представим себе шар с центром в ауфпункте и с изменяющимся со временем радиусом, равным ct (волновой шар), тогда в (8), представляющем собой интеграл пуассоновского типа, мы будем интегрировать по п о в е р х н о с т и этого шара там, где $f(x, y, z)$ отлично от нуля, в то время, когда эта поверхность проходит по пространству.

Напротив, в (9) мы будем интегрировать по о б ъ е м у этого шара и также лишь там, где $f(x, y, z)$ существует.

Совершенно аналогично, как и в заметке VI, соответственные значения при $x < ct$ вычисляются при помощи прохождения волнового шара по соответственным зеркальным изображениям относительно граничной плоскости. Если же нам дано и $u_0(y, z, t)$, то прибавится еще член:

$$u_1 = \frac{-ce^{-\nu x}}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\frac{x}{c}}^{t} e^{-\mu w}\,dw \int\limits_{-\sqrt{c^2w^2-x^2}}^{\sqrt{c^2w^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{c^2w^2-x^2-s^2}}\cdot \tag{10}$$

$$\cdot\left\{u_0(y-s, z-\sqrt{c^2w^2-x^2-s^2}, t-w) + u_0(y-s, z+\sqrt{c^2w^2-x^2-s^2}, t-w)\right\}ds$$

$$x < ct$$

а при $x > ct$ мы получим нуль.

При этом интегрирование ведется по той части п о в е р х н о с т и волнового шара, которая лежит н а л е в о от граничной плоскости (плоскость YZ), в зависимости от распределения u_0 по этой плоскости. В соответственном же интеграле для u_2 интегрируется по тому объему волнового шара, который также находится н а л е в о от граничной плоскости и также в зависимости от распределения u_0 на последней плоскости.

Появление подобных объемных интегралов и представляет собой те особенности, на которые мы указали в заметке VI.

От подобных интегралов, которые в некотором смысле противоречат принципу Гюгенса, мы избавимся при $\rho = 0$. Это произойдет в двух случаях: или $m = \mu = \nu = 0$, и тогда мы переходим к обыкновенному уравнению волны, или если между m, c_1, a_1 существует такая зависимость, что

$$m - \frac{\mu^2}{c^2} + \nu^2 = 0, \tag{11}$$

при этом форма уравнения (1) сохранится и случай (11) соответствует проводу без искажений Хевисайда.

Представленный в заметке VI и здесь переход от одномерного до трехмерного пространства представляет собой метод, применимый также, когда будут иметься производные типа $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, и т. д. К этому случаю мы в дальнейшем вернемся подробнее.

В заключение мы должны сделать некоторые замечания относительно нашей заметки V (2).

Вследствие свойств, принятых для $f(z)$, следует

$$F_1(t) = \int_a^t F(y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt}\frac{f(z)}{z}\,dz, \tag{12}$$

так как $\frac{f(z)}{z}$ также соответствует случаю $\nu > 1$ и потому $F_1(t)$ исчезнет при $t = a$, как это было указано при (7) V.

Из (12) следует

$$\frac{f(z)}{z} = \int_a^\infty e^{-zt} F_1(t)\,dt = \int_a^\infty e^{-zt}\,dt \int_a^t F(y)\,dy. \tag{13}$$

при абсолютной сходимости интеграла. Частичное интегрирование дает нам вследствие (12)

$$f(z) = \int_a^\infty e^{-zt} F(t)\,dt. \tag{14}$$

Таким образом мы доказали, во-первых, существование интеграла (14), а во-вторых, пришли к нашей исходной функции $f(z)$, т. е. доказали еще раз равенство $f_1(z) = f(z)$ заметки V.

Что касается абсолютной сходимости (14), то она следует из (15) V и на основании некоторых простых соображений, о которых я и хочу здесь упомянуть.

Пусть h—действительная и конечная величина и $h > a$. Из (20) V и (12) следует тогда существование интегралов

$$\int_a^h (t-a)F(t)\,dt; \quad \int_a^h (t-a)\,|F(t)|\,dt; \quad \int_a^h F(t)\,dt. \tag{15}$$

Далее получим из (20) V аналогично, как в (12),

$$(t-a)F(t) = 0; \quad t = a \tag{16}$$

и

$$(t-a)F(t) \text{ будет конечным для } a \leqslant t \leqslant h. \tag{17}$$

Из (17) и (16) мы видим, что если третий интеграл в (15) является несобственным, то это может быть лишь для точки $t = a$. Но так как

$$\left|\int_a^{a+\varepsilon} e^{-zt}F(t)\,dt\right| < \int_a^{a+\varepsilon} e^{-xt}\,|F(t)|\,dt < M\int_a^{a+\varepsilon} |F(t)|\,dt, \tag{18}$$

где M—максимум от e^{-xt} в интервале $(a, a+\varepsilon)$, то нам лишь остается на основании сказанного и (15) V доказать существование правого интеграла в (18) при малом $\varepsilon > 0$ *.

Пусть $F(t)$ такое, что при определенном, но малом $\varepsilon > 0$ функция (17), которая, как это видно из (16), начинается при $t = a$ с нуля, в интервале $a \leqslant t \leqslant a+\varepsilon$ не меняет своего знака.

Можно положить, что подобное условие будет иметь место для всех функций, встречающихся в применениях. Так как $t - a \leqslant \varepsilon$ также не меняет своего знака, то то же самое следует и для $F(t)$ и

$$\left| \int_a^{a+\varepsilon} F(t)\, dt \right| = \int_a^{a+\varepsilon} |F(t)|\, dt, \tag{19}$$

и следовательно вследствие существования третьего интеграла в (15) этим все и доказано.

Как пример для условий (4) и (5) V приведем

$$\frac{A + B\{\psi(\nu) - \log z\}}{z^{\nu}} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} e^{-zt} (A + B \log t)\, t^{\nu-1}\, dt\,;\ \nu > 0, \tag{20}$$

что также абсолютно сходится.

Далее заметим, что соотношение (16), которое всегда будет соблюдено, является по Штольцу ([3]) необходимым условием для абсолютной сходимости третьего интеграла в (15).

Институт математики и механики.
Государственный университет.
Ленинград.

Поступило
10 IV 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Игнатовский, ДАН, XV, № 2 (1937). [2] В. С. Игнатовский, ДАН, XIV, № 8, 475—478 (1937). [3] O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Teil I, S. 404, Leipzig, Teubner (1893).

* Из (20) следует, что $|F(t)| < \dfrac{Ke^{ct}}{t-a}$, где K — некоторая постоянная. Поэтому мы вместо нижней границы b абсолютной сходимости в левой части (15) V можем прямо поставить $a+\varepsilon$, с $\varepsilon > 0$ и таким образом непосредственно придем к первому интегралу в (18). Это согласуется со сказанным в тексте относительно несобственного интеграла.