Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 5

МАТЕМАТИКА

С. Б. БЕРГМАН

О ФУНКЦИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. I

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 10 IV 1937)

Как известно, всякую комплексную гармоническую функцию $U(x_1, x_2)$ при помощи соотношения

$$U(x_1, x_2) = f(x_1 + ix_2) + g(x_1 - ix_2) \tag{1.1}$$

можно представить как сумму аналитической и антианалитической функций одной комплексной переменной; исходя из этого, многие теоремы теории а. ф. 1. к. п. (аналитических функций одной комплексной переменной) могут быть перенесены на класс гармонических функций.

В ряде работ было показано, что каждой функции, удовлетворяющей уравнению $\Delta U(x, y, z) = 0$(1) или же $\Delta U(x_1, x_2) + U(x_1, x_2) = 0$(2), можно привести в соответствие в первом случае одну, а во втором случае пару а. ф. 1. к. п. и, исходя из этого представления, перенести ряд теорем теорий а. ф. 1. к. п. на случай функции $U(x, y, z)$ или же $U(x_1, x_2)$.

Мы покажем в настоящей заметке, что метод, указанный в работе K * можно обобщить на случай дифференциальных уравнений вида:

$$\mathbf{L}(U) = U_{z\bar{z}} + AU_z + BU_{\bar{z}} + CU = 0, \tag{1.2}$$

где

$$z = z_1 + iz_2,\quad \bar{z} = z_1 - iz_2,\quad U_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z_1} - i\frac{\partial U}{\partial z_2}\right),$$

$$U_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z_1} + i\frac{\partial U}{\partial z_2}\right),\quad z_k = x_k + iy_k,$$
$$k = 1, 2.$$

A, B, C — данные функции, определенные в известной (четырехмерной) области пространства переменных z_1, z_2.

Сперва приведем интегральное представление функции, удовлетворяющей уравнению $\mathbf{L}(U) = 0$, которое является исходной точкой наших дальнейших исследований. Пусть $\mathfrak{l}^1$** — спрямляемая кривая в комплексной плоскости t, которая целиком лежит в $|t| \leqslant 1$, — соединяет точки $t = -1$ и $t = 1$ так, что выпускает точку $t = 0$ и в точках $t = \pm 1$ касается действительной оси.

Теорема 1. *Пусть* $A(z, \bar{z})$, $B(z, \bar{z})$, $C(z, \bar{z})$ — *непрерывно диффе-*

---

* Относительно обозначения K см. (2).

** Мы будем в дальнейшем готическими буквами обозначать многообразия, причем верхний индекс указывает мерность данного многообразия.

ренцируемые функции в области $\mathfrak{U}^4 = E[|z| < r, |\bar{z}| < r]^*$, *$r$ достаточно мало.* $E(z, \bar{z}, t)$ *— дважды непрерывно дифференцируемое частное решение уравнения*

$$\mathbf{B}(E^*) \equiv -(1-t^2) E^*_{\bar{z}t} + t^{-1} E^*_{\bar{z}} - 2tz [E^*_{z\bar{z}} + DE^*_{\bar{z}} + FE^*] = 0, \quad (1.3)$$

при этом

$$D \equiv n_z - \int_0^{\bar{z}} A_z d\bar{z} + BF \equiv -A_z - AB + C,$$

где n — произвольная а. ф. 1. к. п. z. Тогда, если $f(u)$ ($|u| \leqslant r$, где r достаточно мало) есть а. ф. 1. к. п. u, то

$$U(z, \bar{z}) = \int_{\gamma^1} E(z, \bar{z}, t) f\left(z \frac{1-t^2}{2}\right) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$E(z, \bar{z}, t) = E^*(z, \bar{z}, t) \cdot \exp\left[n(z) - \int_0^{\bar{z}} A(z, \bar{z}) d\bar{z}\right] \quad (1.4)$$

есть частное решение уравнения $\mathbf{L}(U) = 0$.

При доказательстве достаточно показать, что

$$V = \int_{\gamma^1} E^*(z, \bar{z}, t) f\left(z \frac{1-t^2}{2}\right) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{L}^*(V) \equiv V_{z\bar{z}} + DV_{\bar{z}} + FV = 0. \quad (1.5)$$

Но

$$V_{\bar{z}} = \int_{\gamma^1} E^*_{\bar{z}} f \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad V_{z\bar{z}} = \int_{\gamma^1} E^*_{z\bar{z}} f \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_{\gamma^1} E^*_{\bar{z}} \frac{\sqrt{1-t^2}}{2zt} f_t \, dt,$$

так как $f_z = -f_t \frac{1-t^2}{2zt}$. Если мы $\int_{\gamma^1} E^*_{\bar{z}} \frac{\sqrt{1-t^2}}{2zt} f_t \, dt$ интегрируем по частям и полученные для $V_{z\bar{z}}$ и $V_{\bar{z}}$ выражения подставляем в (1.5), то очевидно, что в силу (1. 3) следует, что $V(z, \bar{z})$ удовлетворяет уравнению $\mathbf{L}^*(V) = 0$.

Если E можно представить в виде

$$E(z, \bar{z}, t) = \exp\left[n(z) - \int_0^{\bar{z}} A(z, \bar{z}) d\bar{z}\right] \cdot [c_1 + tz\bar{z} E^{*(1)}(z, \bar{z}, t)],$$

где $E^{*(1)}(z, \bar{z}, t)$ — непрерывно дифференцируемая функция переменных z, $\bar{z}$, t, то E мы назовем **образующей первого рода**.

Теорема 2. *Если коэффициенты A, B, C уравнения $\mathbf{L}(U) = 0$ в области $\mathfrak{U}^4$ четырехмерного пространства — аналитические функции переменных z, $\bar{z}$, то тогда существуют две аналитические образующие* $E_k(z, \bar{z}, t) = E^*_k(z, \bar{z}, t) \cdot H_k(z, \bar{z})$, $k = 1, 2$ *первого рода, так что*

$$U(z, \bar{z}) = \int_{\gamma^1} \left[H_1(z, \bar{z}) E^*_1(z, \bar{z}, t) f\left(z \frac{1-t^2}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + H_2(z, \bar{z}) E^*_2(z, \bar{z}, t) g\left(\bar{z} \frac{1-t^2}{2}\right)\right] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (1.6)$$

---

* $E[\ldots]$ обозначает множество точек, удовлетворяющих указанным в скобках равенствам или неравенствам.

$$H_1(z, \bar{z}) = \exp\left[n_1(z) - \int_0^{\bar{z}} A(z, \bar{z})\, d\bar{z}\right],$$

$$H_2(z, \bar{z}) = \exp\left[n_2(\bar{z}) - \int_0^{z} B(z, \bar{z})\, dz\right],$$

где $f(u)$, $g(u)$, $n_k(u)$, $k = 1, 2,$ — любые а. ф. 1. к. п. u, является регулярным частным решением уравнения $\mathbf{L}(U) = 0$.

Обратно: всякое решение уравнения $\mathbf{L}(U) = 0$, регулярное в $\mathfrak{U}^4$, можно в $\mathfrak{U}^4$ представить в виде (1.6), *причем*

$$\left.\begin{aligned}
f(u) &= \frac{2}{\pi c_1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin\vartheta \frac{dW_1(2u\sin^2\vartheta, 0)}{d(u\sin^2\vartheta)}\, d\vartheta + \frac{1}{\pi c_1} W_1(0, 0),\\
g(u) &= \frac{2}{\pi c_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin\vartheta \frac{dW_2(0, 2u\sin^2\vartheta)}{d(u\sin^2\vartheta)}\, d\vartheta,\\
W_1(z, \bar{z}) &= \frac{U(z, \bar{z})}{H_1(z, \bar{z})}, \quad W_2(z, \bar{z}) = \frac{U(z, \bar{z}) - 2W_1(0, 0) H_1(z, \bar{z})}{H_2(z, \bar{z})},\\
c_k &= \mathrm{E}_k^*(0, 0, 0).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

Для доказательства теоремы 2 мы показываем, что существует частное решение уравнения $\mathbf{B}(\mathrm{E}^*) = 0$ вида:

$$\mathrm{E}^*(z, \bar{z}, t) = c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} z^n \int_0^{\bar{z}} P^{(2n)}(z, \bar{z})\, d\bar{z}, \quad c_1 = \mathrm{const}, \qquad (1.8)$$

где $P^{(2n)}$ определяется из системы уравнений:

$$P^{(2)} = -2c_1 F, \quad (2n-1) P^{(2n+2)} =$$

$$= -2\left[P_z^{(2n)} + DP^{(2n)} + F\int_0^{\bar{z}} P^{(2n)}\, d\bar{z}\right], \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (1.9)$$

Заметим, что при нашей гипотезе $\left[\dfrac{\int_0^{\bar{z}} P^{(2n)}(z, \bar{z})\, d\bar{z}}{\bar{z}}\right]$ регулярно в $\mathfrak{U}^4$.

Далее, чтобы показать сходимость (1.8), мы вводим мажоранты $\widetilde{P}^{(2n)}$, определенные из системы уравнений:

$$\widetilde{P}^{(2)} = \frac{2c_1 \mathrm{C}}{\left(1-\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{\bar{z}}{r}\right)}, \quad (2n-1)\widetilde{P}^{(2n+2)} =$$

$$= 2\left[\widetilde{P}_z^{(2n)} + \frac{\mathrm{C}}{\left(1-\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{\bar{z}}{r}\right)}\widetilde{P}^{(2n)} + \frac{\mathrm{C}}{\left(1-\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{\bar{z}}{r}\right)}\int_0^{\bar{z}} \widetilde{P}^{(2n)}\, d\bar{z}\right],$$

$$n = 1, 2, \ldots \qquad (1.10)$$

где r и C — соответствующим образом выбранные константы.

Легко доказать, что $|P^{(2n)}(|z|, |\bar z|)| \leqslant \widetilde{P}^{(2n)}(|z|, |\bar z|)$. Через $\widetilde{P}^{(2n)} = \dfrac{2^{n-1} Q^{(2n)}}{1.3\ldots(2n-3)\left(1-\dfrac{\bar z}{r}\right)}$ мы вводим новую переменную $Q^{(2n)}$, для определения которой имеем систему уравнений:

$$Q^{(2n+2)} = Q^{(2n)}\left[\frac{n}{r} + \frac{\mathrm{C}\, r}{r-\bar z}\right] + \frac{\mathrm{C}\, r}{r-\bar z}\int\limits_0^{\bar z} Q^{(2n)}\, d\bar z, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$Q^{(2n)}$ зависит только от $\bar z$; $Q^{(2n)}(|\bar z|)$ является неубывающей функцией переменной $|\bar z|$, поэтому $Q^{(2n+2)}(|\bar z|) \leqslant Q^{(2n)}(|\bar z|)\left[\dfrac{n}{r} + 2\mathrm{C}(1+r)\right]$. Таким образом мы получаем мажоранту для (1.8), а именно:

$$c_1 + |t|^2 \frac{c_1 \mathrm{C} r}{(r-|\bar z|)} + 2c_1 r\,\mathrm{C}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2|zt^2|\cdot(n-1+\mathrm{A})(n-2+\mathrm{A})\ldots(1+\mathrm{A})}{(r-|\bar z|)^n\, 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}, \qquad (1.11)$$

$$\mathrm{A} = 2\mathrm{C}\, r(1+r).$$

Формулу (1.7) мы получим, повторяя доказательство, указанное для частного случая уравнения $\Delta u + u = 0$ в работах K (стр. 390) или V* (стр. 99).

Пусть $\mathfrak{F}^2$ — область плоскости x_1x_2; через $\mathfrak{Z}^4_k$ мы обозначим $E[x_1 + (-1)^k y_2 = a,\ x_2 - (-1)^k y_2 = b]$, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$, где $\{a, b\}$ пробегает все точки $\{x_1, x_2\}$ области $\mathfrak{F}^2$, а $\mathbf{H}(\mathfrak{F}^2) = \mathfrak{Z}^4_1 \cdot \mathfrak{Z}^4_2$** будем называть о б о л о ч к о й о б л а с т и $\mathfrak{F}^2$.

Если $U(x_1, x_2)$, функция дважды непрерывно дифференцируемая, является частным решением уравнения $\mathbf{L}(U) = 0$ в звездной области $\mathfrak{F}^2$ плоскости x_1x_2, и если коэффициенты $\mathbf{L}(U)$ в $\mathbf{H}(\mathfrak{F}^2)$ регулярны, то аналитическое продолжение $U(z_1, z_2)$ функции $U(x_1, x_2)$ регулярно в $\mathbf{H}(\mathfrak{F}^2)$ и представляется там в форме (1.6). Совокупность функций

$$U(z, \bar z) = \int\limits_{\mathfrak{l}^1} \mathrm{E}(z, \bar z, t)\, f\left(z\frac{1-t^2}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad (1.12)$$

где $\mathrm{E}(z, \bar z, t)$ — данная функция, а $f(u)$ — любая а. ф. 1. к. п., мы обозначаем как «класс $\mathbf{E}$», функцию $\mathrm{E}(z, \bar z, t)$ мы будем называть «образующей класса $\mathbf{E}$», f — «соответствующей функции $U(z, \bar z)$».

Оказывается, что ряд теорем теории а. ф. 1. к. п., касающихся поведения функции в целом и в окрестности точки, может быть перенесен на класс функции $\mathbf{E}$ [см. K, V и работы, указанные в (1)].

Математический институт
Грузинского филиала Академии Наук СССР.
Тбилиси (Тифлис).

Поступило
10 IV 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Math. ZS., **24**, 641—669 (1926); Math. Annalen, **99**, 629—659 (1928) и **101**, 534—558 (1929). [2] Math. ZS., **32**, 386—406 (1930), в дальнейшем цитируется как работа K; Прикладная математика и механика, **3**, 97—107 (1936), в дальнейшем цитируется как работа V.

* Относительно обозначений K и V см. (2).

** $\mathfrak{Z}^4_1 \cdot \mathfrak{Z}^4_2$ = сечение $\mathfrak{Z}^4_1$ и $\mathfrak{Z}^4_2$.