Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 5

МАТЕМАТИКА

С. ФИНИКОВ

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЛАПЛАСА С ПАРОЙ ПРОЕКТИВНО НАЛАГАЮЩИХСЯ КОНГРУЭНЦИЙ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 26 XII 1936)

1. Пусть мы имеем последовательность Лапласа ... $M_5 M_3 M_1 M_2 M_4 M_6 \ldots$, где каждая точка M_i описывает фокальную поверхность, отнесенную к сопряженной системе линий u, v, каждая прямая $M_1 M_2$, $M_2 M_4$, ... касается на предыдущей поверхности (M_1), (M_2) ... линии u, на последующей (M_2), (M_4) ... — линии v.

Будем называть инвариантами конгруэнции точечный и тангенциальный инварианты Дарбу, общие обеим фокальным сетям этой конгруэнции. Инварианты конгруэнции $(M_{2n} M_{2n+2})$ или $(M_{2n-1} M_{2n+1})$ будем обозначать соответственно через k_n, K_n или k_{-n}, K_{-n}.

2. Допустим, что проективно налагаются две соседние конгруэнции последовательности, например $(M_1 M_2)$ и $(M_1 M_3)$. Это наложение может осуществиться двумя способами:

a) Имеет место изгибание 1-го рода (изгибание Картана-Фубини): фокус M_1 при наложении совмещается с M_3, M_2 с M_1.

b) Наложение осуществляется изгибанием 2-го рода (Террачини); так как при этом одна конгруэнция налагается на полярное преобразование другой, то фокус, соответствующий линии u, налагается на фокус, соответствующий линии v, и наоборот, т. е. M_1 на M_1 и M_2 на M_3.

По теореме Фубини две конгруэнции проективно наложимы, если развертывающиеся поверхности их соответствуют друг другу, если асимптотические линии хотя бы на одной полости фокальной поверхности одной конгруэнции соответствуют таковым на соответствующей полости другой конгруэнции и если инварианты обеих конгруэнций соответственно равны. В случае изгибания 2-го рода последнее условие читается так: если точечный и тангенциальный инварианты одной конгруэнции соответственно равны тангенциальному и точечному инвариантам другой.

Если на поверхности (M_1) асимптотические линии определяются уравнением:

$$\varphi du^2 + dv^2 = 0,$$

то на поверхности (M_2) их уравнение будет:

$$K_0 \varphi\, du^2 + k_0\, dv^2 = 0.$$

Следовательно наложение 1-го рода конгруэнций (M_1M_2) и (M_1M_3) характеризуется условиями:

$$K_0 = k_0,\ K_{-1} = k_{-1},\ k_0 = k_{-1},\ K_0 = K_{-1}. \tag{1}$$

Таким образом конгруэнции касательных к линиям сопряженной системы проективно наложимы изгибанием 1-го рода, если все четыре инварианта Дарбу этой системы равны между собой.

3. Сопряженная система с четырьмя равными инвариантами является одновременно: 1) сопряженной системой R Цицейки-Демулена, 2) сопряженной системой Ионаса и 3) системой A Слотника.

Четыре однородных координаты точки, описывающей такую сеть, являются решениями системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = (A - B)\, z, \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = U' \frac{\partial z}{\partial u} + V' \frac{\partial z}{\partial v} + (A + B)\, z, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где U и V — функции одного u или одного v, A и B — функции одного аргумента $u + v$ или $u - v$.

Система (2) вполне интегрируема, если эти функции удовлетворяют уравнениям:

$$U'(A' - B') + V'(A' + B') + (U'' + V'')(A - B) = 0, \tag{3}$$

где штрихи обозначают дифференцирование.

Если $U' = V' = 0$, то A и B произвольны; поверхность (M_1)—2-го порядка. Обратно, произвольная сеть линий R на поверхности 2-го порядка имеет четыре равных инварианта. Другой частный случай получим, полагая все четыре функции U' V', A, B постоянными.

Если $V' = 0$, то получим решения в виде:

1) $A = a \sin(u + v) + b,\ B = a \sin(u - v) + b,\ U' = \dfrac{c}{\cos u}$,

2) $A = (u + v)^2 + b,\ B = (u - v)^2 + b,\ U' = \dfrac{c}{u}$,

3) $A = u + v,\ B = u - v,\ U' = c$,

где a, b, c суть постоянные.

Аналогично, если $B = 0$, имеем:

1) $U' = a \sin u + b,\ V' = -a \sin v + b,\ A = \dfrac{c}{\cos(u + v)}$,

2) $U' = u^2 + b,\ V' = -v^2 + b,\ A = \dfrac{c}{u + v}$,

3) $U' = u,\ V' = -v,\ A = c$.

Эти примеры показывают, что существуют поверхности, проективно не налагающиеся, с одними и теми же инвариантами сопряженной системы.

4. Проективное наложение 2-го рода смежных конгруэнций (M_1M_2), (M_1M_3) было рассмотрено Террачини и Пантацци. Оно определяется равенствами:

$$k_{-1} = K_0,\ k_0 = K_{-1}. \tag{4}$$

Фокальная сеть (M_1) есть сеть A Слотника.

5. Проективная наложимость 1-го рода конгруэнций (M_1M_3) и (M_2M_4) характеризуется равенствами:

$$K_0K_1 = k_0k_1, \tag{5}$$

$$k_{-1} = k_1, \; K_{-1} = K_1. \tag{6}$$

Отсюда следует, что (M_1M_2) — частный случай конгруэнции Гурса. Если кроме того (M_1M_2) налагается на (M_4M_6), то к условиям (5), (6) надо присоединить:

$$k_0 = k_2. \tag{7}$$

Условие $K_2 = K_0$ следует отсюда с помощью уравнения Дарбу:

$$k_{n-1} + k_{n+1} = 2k_n - \frac{\partial^2 \ln k_n}{\partial u \partial v}. \tag{8}$$

Если применить эту формулу к уравнению (7), то получим $k_{-1} = k_3$ и т. д. Все инварианты четного или соответственно нечетного порядка равны между собой. Асимптотические линии соответствуют на всех фокальных полостях через одну.

Все конгруэнции, полученные четным или соответственно нечетным числом преобразований Лапласа, проективно наложимы изгибанием 1-го рода.

В качестве примера последовательности (5), (6) можно привести последовательность R, определяемую системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial M_1}{\partial u} = \sqrt{k}\, M_2, && \frac{\partial M_1}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln k}{\partial v} M_1 + M_3,\\
&\frac{\partial M_2}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln k}{\partial u} M_2 + M_4, && \frac{\partial M_2}{\partial v} = \sqrt{k}\, M_1,\\
&\frac{\partial M_3}{\partial u} = hM_1, && \frac{\partial M_3}{\partial v} = RM_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln k}{\partial v} M_3 - \sqrt{k}\, M_4,\\
&\frac{\partial M_4}{\partial u} = RM_2 - \sqrt{k}\, M_3 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln k}{\partial u} M_4, && \frac{\partial M_4}{\partial v} = hM_2,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где M_i означает одну из четырех однородных координат точки поверхности (M_i), а R, $k = k_{2n}$ и $h = k_{2n+1}$ определяются системой уравнений:

$$\frac{\partial^2 \ln k}{\partial u \partial v} = 2(k - h), \quad \frac{\partial R}{\partial u} = h\frac{\partial \ln kh}{\partial v}, \quad \frac{\partial R}{\partial v} = h\frac{\partial \ln kh}{\partial u}. \tag{10}$$

Каждая конгруэнция $(M_{2n}\; M_{2n+2})$ наложима на $(M_{2n+1}\; M_{2n-1})$.

Если кроме того $kh = 1$, то уравнение (7) тоже удовлетворено. При этом $R = \mathrm{const}$, и все конгруэнции последовательности суть конгруэнции Вильчинского.

6. Если конгруэнции (M_1M_3) и (M_2M_4) наложимы изгибанием 2-го рода, то асимптотические линии соответствуют на (M_1) и (M_2), и конгруэнция (M_1M_2) определена уравнениями

$$K_0 = k_0, \; K_1 = k_{-1}, \; K_{-1} = k_1; \tag{11}$$

это—произвольная конгруэнция линейного комплекса. Ее два преобразования Лапласа одного и того же порядка $(M_{2n-1}M_{2n+1})$ и $(M_{2n}M_{2n+2})$ не только наложимы, но и полностью совпадут, если над одной из них выполнить подходящее полярное преобразование.

7. Проективная наложимость 2-го рода (M_3M_5) и (M_2M_4) приводит к уравнениям

$$K_0K_{-1} = k_0k_{-1}, \; K_1 = k_{-2}, \; K_{-2} = k_1.$$

Если продифференцировать первое из этих уравнений, применяя формулу (8), то получим:

$$K_0 + K_{-1} = k_0 + k_{-1}.$$

Отсюда или $K_0 = k_{-1}$, $K_{-1} = k_0$, т. е. (M_1) — сеть Слотника (наиболее общая), или $K_0 = k_0$, $K_{-1} = k_{-1}$, т. е. (M_1) — сеть R (частного вида). Нетрудно заметить, что у сети Слотника не только конгруэнции касательных к линиям сети, но и все их преобразования Лапласа одного и того же порядка проективно наложимы изгибанием 2-го рода.

Институт математики
Московского университета.

Поступило
26 XII 1936.