Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 3

ФИЗИКА

И. Е. ТАММ, член-корреспондент Академии Наук СССР, и И. М. ФРАНК

КОГЕРЕНТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ БЫСТРОГО ЭЛЕКТРОНА В СРЕДЕ

В 1934 г. П. А. Черенковым ([1]) было установлено и в дальнейшем детально исследовано новое явление, состоящее в следующем: все без исключения жидкости и твердые тела при прохождении через них быстрых электронов (например β-электронов или комптон-электронов от γ-лучей), помимо флуоресценции, имеющейся в некоторых случаях, всегда испускают слабое видимое свечение. Это свечение существенно отлично от обычной флуоресценции: оно частично поляризованно, причем электрический вектор колебаний параллелен движению электрона; и оно не может быть потушено ни температурным воздействием, ни прибавлением к светящейся среде тушащих веществ.

Эти особенности явления были детально рассмотрены С. И. Вавиловым ([2]), предположившим, что свечение вызывается торможением быстрых электронов.

В дальнейших опытах Черенков ([3]) обнаружил резкую асимметрию в распределении интенсивности этого свечения, являющуюся пожалуй наиболее характерным его свойством. Оказалось, что в направлении движения электрона света излучается много больше, чем в противоположном направлении.

Отсюда непосредственно вытекает, что бомбардируемое электронами вещество излучает когерентно по крайней мере на протяжении, сравнимом по своим размерам с длиной волны видимого света. Таким образом это излучение не может быть вызвано ни рассеянием электронов на атомных ядрах*, ни взаимодействием с отдельными атомами.

Это явление может быть однако объяснено как качественно, так и количественно, если принять во внимание, что *электрон, движущийся в среде, излучает свет даже при равномерном движении, если только его скорость превышает скорость света в этой среде.*

Рассмотрим электрон, движущийся в среде, характеризуемой показателем преломления n, с постоянной скоростью v, направленной по оси z. Поле электрона можно рассматривать как результат суперпозиции волн запаздывающего потенциала, непрерывно излучаемых элект-

* Интенсивность видимого света, излучаемого при этом процессе, должна быть примерно в 10^4 раз меньше наблюдаемой.

роном и распространяющихся со скоростью $\frac{c}{n}$. Легко видеть, что в направлении, образующем некоторой угол θ с осью z, вся эта последовательность испускаемых волн будет иметь одинаковые фазы, если только v, n и θ удовлетворяют условию:

$$\frac{c}{n} = v \cos\theta; \quad \cos\theta = \frac{1}{\beta n}, \tag{1}$$

где $\beta = \frac{v}{c}$. Эти распространяющиеся в фазе волны обуславливают излучение в направлении θ, в то время как для всех других направлений радиация уничтожается интерференцией волн.

Условие (1) может быть выполнено только, если $\beta n > 1$, т. е. только в случае быстрых электронов и только в среде, в которой показатель преломления для рассматриваемых частот заметно больше единицы. Например, если $n = 1.33$ (вода $\lambda = 5900$ Å), то энергия электрона не может быть меньше 260 kV. Если же $\beta n > 1$, то равномерно движущийся электрон всегда излучает свет в направлении θ*.

Перейдем к рассмотрению более детальной теории. Так как в данном случае мы интересуемся только видимой радиацией, то среду можно рассматривать макроскопически, применяя для этого обычные уравнения электромагнитной теории света. Пользуясь динамическим соотношением между поляризацией $\mathbf{P}$ и электрической силой $\mathbf{E}$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \sum_s \omega_s^2 \mathbf{P}_s = \alpha \mathbf{E},$$

где ω_s — собственные частоты молекулярных осцилляторов среды, и разлагая все переменные, характеризующие поле, в интегралы Фурье:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{i\omega t} d\omega; \quad \mathbf{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}_\omega e^{i\omega t} d\omega \quad \text{и т. д.} \tag{2}$$

для соотношения между $\mathbf{P}_\omega$ и $\mathbf{E}_\omega$, имеем:

$$\mathbf{P}_\omega = (n^2 - 1)\,\mathbf{E}_\omega, \tag{3}$$

здесь n означает показатель преломления среды для частоты ω. С помощью (2) и (3) уравнения Максвелла приводятся к следующему виду:

$$\mathbf{H}_\omega = \operatorname{rot} A\omega, \quad \mathbf{E}_\omega = -\operatorname{grad}\varphi_\omega - \frac{i\omega}{c}\mathbf{A}_\omega = -\frac{ic}{\omega n^2}\nabla \operatorname{div}\mathbf{A}_\omega - \frac{i\omega}{c}\mathbf{A}_\omega, \tag{4}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2}\mathbf{A}_\omega = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}(\omega), \tag{5}$$

причем исключение φ_ω из уравнения для $\mathbf{E}_\omega$ производится на основании соотношения между скалярным и векторным потенциалами:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}_\omega + \frac{i\omega}{c} n^2 \varphi_\omega = 0.$$

Электрону, движущемуся в среде по оси z с постоянной скоростью v, соответствует плотность тока $\mathbf{j}$, равная:

$$j_x = j_y = 0; \quad j_z = ev\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - vt),$$

где буквой δ обозначены дираковские функции.

* Рентгеновы лучи излучаться не могут, так как для них $n \leqslant 1$.

Разлагая j_z на Фурье-компоненты, для частоты ω имеем:

$$j_z(\omega) = \frac{e}{2\pi} e^{-\frac{i\omega z}{v}} \delta(x)\delta(y),$$

или, введя цилиндрические координаты ρ, φ, z:

$$j_z(\omega) = \frac{e}{4\pi^2\rho} e^{\frac{i\omega z}{v}} \delta(\rho).$$

Подставляя это выражение в (5) и полагая:

$$A_\rho = A_\varphi = 0; \quad A_z(\omega) = u(\rho) e^{-\frac{i\omega z}{v}}, \tag{6}$$

получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + s^2 u = -\frac{e}{\pi c\rho}\delta(\rho), \tag{7}$$

где

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2}(\beta^2 n^2 - 1) = -\sigma^2. \tag{8}$$

Таким образом u должна быть цилиндрической функцией, удовлетворяющей уравнению Бесселя:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + s^2 u = 0 \tag{9}$$

всюду, за исключением полюса $\rho = 0$.

Для получения условия, которому удовлетворяло бы u при $\rho = 0$, заменим правую часть уравнения (7) величиной f, причем

$$f = -\frac{2e}{\pi c\rho_0}, \text{ если } \rho < \rho_0, \text{ и } f = 0, \text{ если } \rho > \rho_0,$$

и проинтегрируем по площади круга радиуса ρ_0, а затем приведем к пределу для $\rho_0 \to 0$. В результате получим:

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\frac{\partial u}{\partial\rho} = -\frac{e}{\pi c}. \tag{10}$$

Необходимо различать два возможных случая.

Первый из них относится к малым скоростям электрона, для которых $\beta n < 1$, $s^2 < 0$, и значит $\sigma^2 = -s^2 > 0$, т. е. σ — величина действительная. Для этого случая решением (9), удовлетворяющим (10) и обращающимся в нуль для бесконечности, будет:

$$u = \frac{ie}{2c} H_0^{(1)}(i\sigma\rho), \tag{11}$$

где $H_0^{(1)}$ функция Ханкеля первого рода.

Для $\sigma\rho \gg 1$ можно воспользоваться асимптотическим значением $H_0^{(1)}$. Тогда, учитывая (6) и (11), имеем:

$$A_z = \frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sigma\rho + i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)}}{\sqrt{2\pi\sigma\rho}} d\omega, \qquad \sigma\rho \gg 1.$$

Таким образом в случае малых скоростей электрона мы имеем экспоненциальное затухание поля с расстоянием. Излучения, следовательно, в этом случае не имеется.

Однако если скорость электрона настолько велика, что для некоторых частот величина $\beta n = \frac{v}{c} n(\omega)$ становится больше единицы, и по-этому величина s [уравнение (8)] становится действительной, то общее решение уравнений (7) и (9) для бесконечности дает цилиндрическую волну. Выбирая случай, представляющий уходящую волну, а не волну, идущую к оси z, получим следующее решение (9), удовлетворяющее условию (10):

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{ie}{2c} H_0^{(2)}(s\rho), \text{ если } \omega > 0, \\ u &= \frac{ie}{2c} H_0^{(1)}(s\rho), \text{ если } \omega < 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

причем величина s предполагается положительной. Пользуясь асимптотическим значением $H_0^{(2)}$ и принимая во внимание (6) и (12), для $s\rho \gg 1$ получаем:

$$A_z(\omega) = \frac{-e}{c\sqrt{2\pi s\rho}} e^{i\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)-i\left(s\rho-\frac{3\pi}{4}\right)},$$

если $\omega > 0$, и комплексно сопряженное этому выражение для $\omega < 0$.

Величину, стоящую в степени, пользуясь значением s из (8), можно преобразовать. Тогда получим:

$$\omega > 0, \quad A_z(\omega) = \frac{-e}{c\sqrt{2\pi s\rho}} e^{i\omega\left(-t\frac{z\cos\theta+\rho\sin\theta}{w}\right)+\frac{3}{4}\pi i}, \tag{13}$$

где угол θ определяется (1) и $w = \frac{c}{n}$. Таким образом, если $\beta n > 1$, мы получаем волну, идущую в направлении θ. Электрический вектор этой волны лежит в меридиональной плоскости (z, ρ).

Вычисляя с помощью (4) интенсивность поля в волновой зоне, имеем:

$$\left.\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{-a}{\sqrt{\rho}} \int \sqrt{s}\, d\omega \cos\chi, \\ E_\rho &= \frac{-a}{c\sqrt{\rho}} \int \frac{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}\,\omega\, d\omega}{\beta^2 n^2 \sqrt{s}} \cos\chi, \\ E_z &= \frac{a}{c\sqrt{\rho}} \int \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \frac{\omega\, d\omega}{\sqrt{s}} \cos\chi, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где $a = \frac{e}{c}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ и $\chi = \omega\left(t - \frac{z\cos\theta + \rho\sin\theta}{w}\right) + \frac{\pi}{4}$ и остальные компоненты **E** и **H** равны нулю.

В отличие от (2) интеграция здесь распространяется только на положительные значения ω и ограничивается интервалом частот, в котором $\beta n(\omega) \geqslant 1$.

Общая энергия, излучаемая электроном через поверхность цилиндра длины l (с осью, совпадающей с линией движения электрона), равна

$$W = 2\pi\rho l \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]_\rho \, dt.$$

Если принять во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega' t + \beta)\, dt = \pi\delta(\omega - \omega'),$$

то для излучения энергии находим:

$$W = \frac{e^2 l}{c^2} \int_{(\beta n > 1)} \omega\, d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right). \tag{15}$$

Точно такой же результат получается при расчете общей энергии излучения электрона, который первоначально покоился, затем внезапно получил скорость v и, пройдя путь l, внезапно же остановился. В этом случае применимость (15) ограничена только условием, чтобы путь электрона l был велик по сравнению с длиной волны излучаемого света. Если электрон постепенно теряет свою скорость, то уравнение (15) может быть применено к отдельным участкам его пути, существенно только, чтобы величина этих участков была велика по сравнению с длиной волны. В этом случае угол θ между $\mathbf{v}$ и направлением радиации по мере потери скорости постепенно уменьшается.

Порядок величины для общей потери энергии на излучение можно определить, если заменить n^2 в (15) его приближенным значением из уравнений:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad n_0^2(0) = \varepsilon = 1 + \frac{A}{\omega_0^2},$$

и произвести интеграцию от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$, где ε—диэлектрическая постоянная, а ω_0—некоторая средняя собственная частота среды. Таким образом мы получим следующее приближенное выражение для потери энергии на радиацию, отнесенное к единице пути электрона:

$$\frac{dW}{dl} = \frac{e^2\omega_0^2}{2c^2}(\varepsilon - 1)\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}. \tag{16}$$

Полагая $\omega_0 \sim 6 \cdot 10^{15}$ сек.$^{-1}$, для $\frac{dW}{dl}$ получаем величину порядка нескольких киловольт на сантиметр, т. е. величину, исчезающе малую по сравнению с потерей энергии, вызванной иными причинами.

В то время, когда эти вычисления были уже в значительной мере закончены, акад. А. Ф. Иоффе любезно указал нам на работы Зоммерфельда ([4]), вычислившего силу, действующую на электрон, движущийся в вакууме с постоянной скоростью $v > c$. Силы эти также вызваны радиацией рассмотренного рода. Как известно, однако, из теории относительности, условие $v > c$ в действительности неосуществимо.

Уравнение (15) дает для общего числа фотонов, испускаемых электроном в спектральной области, ограниченной длинами волн λ_1 и λ_2, следующую велинину:

$$N = 2\pi\alpha\left(\frac{c}{\lambda_2} - \frac{c}{\lambda_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right), \tag{17}$$

где α—постоянная тонкой структуры, $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, и n—среднее значение показателя преломления в этой области.

Полагая $n = 1.33$, $\beta^2 = \frac{3}{4}$ (электрон с энергией 500 kV) и $l = 0.1$ см, находим, что в видимой области между $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ см и $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$см излучается примерно 10 фотонов на электрон. Этот результат совпадает по порядку величины с экспериментально наблюденным Черенковым (не опубликовано).

Опыты Черенкова устанавливают также существование пропорциональности между интенсивностью радиации и пробегом электрона в различных средах (см. выше статью П. А. Черенкова). Вопрос о зависимости от показателя преломления дискутируется им в этой же статье; его выводы благоприятны для теории.

Если мы примем во внимание, что большая часть измерений Черенкова выполнена с сильно расходящимся пучком комптоновских электронов, получаемых от γ-лучей и характеризуемых размытым спектром скоростей, то относительно всей совокупности экспериментального материала, включая сюда и вопросы о поляризации, угловой асимметрии и абсолютной интенсивности свечения можно утверждать, что она находится в полном согласии с изложенной здесь теорией.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии Наук СССР.
Москва.

Поступило
2 I 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. А. Черенков, ДАН, II, № 8, 451 (1934). [2] С. И. Вавилов, ДАН, II, № 8, 457 (1934). [3] П. А. Черенков, ДАН, III, № 9, 414 (1936). [4] A. Sommerfeld, Götting Nachrichten, S. 99, 363 (1904); S. 201 (1905).