Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. А. ВЕНКОВ

О ГРУППЕ АУТОМОРФИЗМОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 10 XII 1936)

1. Настоящая заметка представляет резюме моей работы по неопределенным квадратичным формам. Цель работы—определение фундаментальной области группы G целочисленных подстановок (аутоморфизмов), переводящих в себя данную неопределенную квадратичную форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ в том случае, когда ее разложение на квадраты имеет вид:

$$\varepsilon f(x_i) = -y_1^2 - \ldots - y_{n-1}^2 + y_n^2, \tag{1}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, y_i — вещественные линейные формы переменных x_i. При другом разложении f на квадраты группа G не имеет фундаментальной области. Метод работы — обобщение полигона Клейна ([1]).

Обозначения: $f(x_i) = \sum\limits_1^n a_{kl} x_k x_l \, (a_{kl} = a_{lk})$; для двух точек A и B с координатами (x_i) и (y_i): $f(A, B) = f(x_i, y_i) = \sum\limits_1^n a_{kl} x_k y_l$; K — конус $f = 0$. Точки, для которых $\varepsilon f(x_i) > 0$ или $\varepsilon f(x_i) < 0$, суть внутренние или внешние точки конуса K. Определитель формы f есть $d \neq 0$, союзная с ней форма $F(x_i)$. Если $\varepsilon' = \operatorname{sgn}(\varepsilon d)$, то $\varepsilon' F(x_i)$ имеет разложение на квадраты того же вида, что и (1), так что $\varepsilon' F(x_i) > 0$ есть внутренность союзного конуса. Плоскость $\varphi = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = k$ называем плоскостью эллиптического, параболического или гиперболического направления для конуса K, смотря по тому, будет ли $\varepsilon' F(p_i) > 0$, $= 0$ или < 0. Пусть $\varphi = 0$ — плоскость эллиптического направления; множество точек внутри или на границе K, для которых φ сохраняет постоянный знак, назовем полостью конуса K. Из двух полостей K выберем одну определенную и обозначим ее K'; пусть $\mathfrak{M}$ — множество точек с целыми координатами, лежащих внутри K'. Предполагая точки $\mathfrak{M}$ несдвигаемыми, а конус K сделанным из материи, натянем этот конус на точки $\mathfrak{M}$; тогда материя образует многогранник, который назовем охватывающим многогранником (Umrisspolyeder = UP). Строгое оформление этого многогранника дано в моей работе и основано на отдельных определениях **вершин** и **граней** (см. следующие параграфы).

2. Точку (l_i) из $\mathfrak{M}$ назовем **вершиной** UP, если существует плоскость эллиптического направления $\varphi = 1$ такая, что $\varphi \geqslant 1$ для всех точек $\mathfrak{M}$, причем знак равенства имеет место только для (l_i). Для значения f в вершине при помощи теоремы о выпуклом теле получается ограничение:

$$|f(l_i)| \leqslant \sqrt[n]{\frac{2^{2n-2}\, n^2 \Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{n-1}} \cdot |d|}\ . \qquad (2)$$

3. Плоскость называется **гранью** UP, если она проходит через конечное или бесконечное число точек $\mathfrak{M}$, вполне определяющих положение этой плоскости, все же остальные точки $\mathfrak{M}$ лежат по одну сторону этой плоскости. Грань может быть либо плоскостью эллиптического направления (такая плоскость отсекает от K' всегда кусок конечных размеров) либо параболического направления. Доказывается, что через каждую вершину проходит **конечное** число граней, вполне определяющих положение этой вершины. Пусть m — данная вершина; все ребра многогранника UP, исходящие из вершины m (которых конечное число), могут быть характеризованы другими вершинами $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2, \ldots$, лежащими на концах этих ребер. Эти вершины $\overline{m}_k$ назовем **смежными** с m.

4. Пусть m_1, $m_2, \ldots$ — все вершины UP и m — одна из них. Определим область $V(m)$ бесконечным числом неравенств:

$$\varepsilon f(x,\ m) \leqslant \varepsilon f(x,\ m_k), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

Доказывается, что эти неравенства равносильны конечному числу неравенств, именно тех, в которых $m_k = \overline{m}_k$ суть вершины, смежные с m. Таким образом $V(m)$ есть пирамида с конечным числом граней, лежащая целиком внутри K'. Пирамиды $V(m_1)$, $V(m_2), \ldots$ заполняют целиком всю плоскость K' и друг на друга не налегают. Назовем две вершины m_k и m_l **эквивалентными**, если координаты их связаны подстановкой группы G.

В случае, когда коэффициенты f — целые числа, из неравенства (2) вытекает, что существует лишь конечное число неэквивалентных вершин $m_1, \ldots, m_k$.

Тогда пирамиды $V(m_1), \ldots, V(m_k)$ и дают возможность построить искомую фундаментальную область группы G.

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Ленинградского государственного
университета им. Бубнова.

Поступило
10 XII 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Klein, Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie, I, Göttingen (1896), S. 103.