Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 3

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О ПРОБЛЕМЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 29 XI 1936)

Как известно, F. Riesz (1) показал, что из всех функций $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, регулярных в области $|z|\leqslant 1$ и имеющих заданные первые коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n$, существует одна и только одна функция $F^x(z)$, обращающая в минимум интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} |F(z)|\,|dz|; \tag{1}$$

функция $F^x(z)$ может быть представлена и притом единственным образом в таком виде:

$$F^x(z)=q^2(z)\,z^{\nu}\tau(z)\,\overline{\tau}\left(\frac{1}{z}\right)=c_0+c_1 z+\cdots+c_n z^n+\cdots, \tag{2}$$

где $q(z)$ — полином степени $\sigma\leqslant n$, все корни которого лежат в области $|z|\geqslant 1$, а $\tau(z)$ — полином степени $\nu=n-\sigma$.

Опираясь на эту теорему F. Riesz'a, мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Для всех функций $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, которые в области $|z|<1$ регулярны и удовлетворяют условию $|f(z)|\leqslant 1$, имеет место неравенство:*

$$|\omega(f)|=|c_n a_0+c_{n-1}a_1+\cdots+c_0 a_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|q(z)\,\tau(z)|^2\,|dz|; \tag{3}$$

знак равенства имеет место только для функции

$$f^x(z)=e^{i\alpha}\,\frac{z^{\sigma}\overline{q}\left(\frac{1}{z}\right)}{q(z)}\,{}^*. \tag{4}$$

Рассмотрим произвольную функцию $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, регулярную в об-

* Число σ и полином $q(z)$ находятся по заданным числам $c_0, c_1, \ldots, c_n$ из формулы (2).

ласти $|z|<1$; из всех таких функций, имеющих те же первые коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$, пусть $f_1(z)$ будет та, для которой верхняя граница модуля $M(f)$ в области $|z|<1$ минимальна, т. е. $M(f) \geqslant M(f_1)$ при $|z|<1$.

Как известно из решения задачи Carathéodory-Fejér'a, $f_1(z)$—рациональная функция, регулярная в области $|z|\leqslant 1$, модуль которой на круге $|z|=1$ сохраняет постоянное значение $M(f_1)$. Мы имеем очевидное неравенство:

$$\frac{|\omega(f)|}{M(f)} \leqslant \frac{|\omega(f_1)|}{M(f_1)}. \tag{5}$$

С другой стороны, мы можем написать:

$$\omega(f_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{F^x(z)\, f_1(z)}{z^n} \cdot \frac{dz}{z}, \tag{6}$$

откуда находим желаемое неравенство:

$$\frac{|\omega(f)|}{M(f)} \leqslant \frac{|\omega(f_1)|}{M(f_1)} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} |q(z)\tau(z)|^2\, |dz|; \tag{7}$$

если взять $f(z) = f^x(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z^c\, \overline{q}\left(\frac{1}{z}\right)}{q(z)}$, то получим равенство:

$$\frac{|\omega(f^x)|}{M(f^x)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} |q(z)\tau(z)|^2\, |dz|, \tag{8}$$

и наша теорема таким образом доказана.

П р е д п о л о ж и м, ч т о з а д а н н ы е ч и с л а $c_0, c_1, \ldots, c_n$ т а к о в ы, ч т о (2) у д о в л е т в о р я е т с я п р и $\nu=0$; в таком случае

$$q^2(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{9}$$

и мы приходим к оценке, найденной O. Szász'ом ([2]):

$$|c_n a_0 + c_{n-1} a_1 + \ldots + c_0 a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} |q(z)|^2\, |dz|; \tag{10}$$

знак равенства имеет место лишь при том условии, что все корни полинома $q(z)$ лежат в области $|z|\geqslant 1$.

П р е д п о л о ж и м т е п е р ь, ч т о з а д а н н ы е ч и с л а $c_0, c_1, \ldots, c_n$ т а к о в ы, ч т о (2) у д о в л е т в о р я е т с я п р и $\nu=n$; в таком случае имеем:

$$\tau(z)\,\overline{\tau}\left(\frac{1}{z}\right) = e^{i\gamma}\frac{c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots}{z^n}; \tag{11}$$

полагая $z=e^{i\theta}$, мы видим, что справа должен стоять неотрицательный тригонометрический полином, т. е. должно выполняться неравенство:

$$\frac{1}{2} + R\sum_{r=0}^{n-1}\frac{c_{n-r}}{c_n}e^{-ir\theta} \geqslant 0, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi; \tag{12}$$

при этом по (3) имеем:

$$|c_n a_0 + c_{n-1} a_1 + \ldots + c_0 a_n| \leqslant |C_n|. \tag{13}$$

Мы пришли к оценке Schur'a-Szegö ([3]), справедливой при условии (12).

Институт математики и механики.
Харьковский университет.

Поступило
29 XI 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Riesz, Acta Mathematica, **42**, 145—171 (1920). [2] O. Szász, Math. ZS., I, 163—183 (1918). [3] J. Schur u. G. Szegö, Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wiss., 545—560 (1925).