Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 3

МАТЕМАТИКА

Академик УАН М. Ф. КРАВЧУК

О НЕКОТОРЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ В ОБОБЩЕННОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Пусть неотрицательные неубывающие функции

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx$$

и

$$Q(x)=\int_{-\infty}^{x} dQ(x)$$

удовлетворяют равенствам:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T}\cos k\pi\frac{x-\alpha}{T}\cdot dQ(x)=\int_{\alpha}^{\alpha+T}\cos k\,\pi\frac{x-\alpha}{T}\,dP(x) \qquad (1)$$

$$(k=0,1,\ldots,n).$$

Введя обозначение:

$$M=\limsup|p(x)| \qquad (\alpha\leqslant x\leqslant\alpha+T),$$

из равенств (1) можно получить [1] [2]:

$$\left|\int_{\alpha}^{x} dQ(x)-\int_{\alpha}^{x} dP(x)<\frac{TM}{n}(A+B\log n)\right. \qquad (2)$$

$$(\alpha\leqslant x\leqslant\alpha+T),$$

где A и B—абсолютные постоянные. Если кроме того существует число N, удовлетворяющее неравенству:

$$|p(x)-p(x')|<N\cdot\Big|\log|x-x'|\Big|^{-1-\delta} \qquad (\alpha\leqslant x\leqslant\alpha+T,\ \delta>0),$$

то [2]

$$\left|\int_{\alpha}^{x} dQ(x)-\int_{\alpha}^{x} dP(x)\right|<\frac{T(AM+BN)}{n} \qquad (2')$$

$$(\alpha\leqslant x\leqslant\alpha+T).$$

В этой заметке будут выведены и применены к теории вероятностей неравенства (9) (9′), (14) (14′), аналогичные неравенствам (2) и (2′), для случая, когда условия (1) выполняются лишь приближенно, и без ограничения значений переменного x.

§ 1. Пусть разности:

$$\zeta_k = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\pi \frac{x-\alpha}{T} \cdot dQ(x) - \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\pi \frac{x-\alpha}{T}\, dP(x), \tag{3}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$

удовлетворяют неравенствам:

$$|2\zeta_k| < \zeta. \tag{4}$$

Тогда при обозначениях

$$\varphi(x) = \frac{1}{T}\left[\zeta_0 + 2\zeta_1 \cos\pi\frac{x-\alpha}{T} + 2\zeta_2 \cos 2\pi \frac{x-\alpha}{T} + \cdots + 2\zeta_n \cos n\pi \frac{x-\alpha}{T}\right],$$

$$\bar{\varphi} = \operatorname{Max}|\varphi(x)|$$

имеем:

$$\bar{\varphi} \leqslant \frac{(n+1)\zeta}{T}, \tag{5}$$

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{x} \varphi(x)\, dx\right| \leqslant \zeta \cdot \frac{2+\log n}{\pi} \qquad (\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + T). \tag{6}$$

С помощью равенств (3) для неотрицательных функций

$$\left.\begin{aligned} dQ_1 &= dQ + \bar{\varphi}\, dx - \varphi\, dx, \\ dP_1 &= dP + \bar{\varphi}\, dx \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

получаем равенства типа (1):

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\pi \frac{x-\alpha}{T} \cdot dQ_1(x) = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\pi \frac{x-\alpha}{T} \cdot dP_1(x)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n),$$

следовательно соответственно и неравенства (2) и (2′):

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{x} dQ_1(x) - \int\limits_{\alpha}^{x} dP_1(x)\right| < \frac{T(M+\bar{\varphi})}{n}(A + B\log n), \tag{8}$$

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{x} dQ_1(x) - \int\limits_{\alpha}^{x} dP_1(x)\right| < T \cdot \frac{A(M+\bar{\varphi}) + BN}{n} \tag{8′}$$

$$(\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + T).$$

Отсюда, использовав формулы (5), (6) и (7), выводим соответственно

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{x} dQ(x) - \int\limits_{\alpha}^{x} dP(x)\right| < \left(\frac{TM}{n} + \zeta\right)(A_1 + B_1 \log n), \tag{9}$$

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{x} dQ(x) - \int\limits_{\alpha}^{x} dP(x)\right| < \frac{T(AM+BN)}{n} + \zeta(C + D\log n) \tag{9′}$$

$$(\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + T),$$

где A_1 B_1, C, D—абсолютные постоянные.

§ 2. Пусть $R(x)$ есть функция распределения вероятностей, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^r\, dR(x) = 1 \qquad (r > 0).$$

Тогда на основании обобщенного неравенства Чебышева-Маркова будет:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{-H}^{-\tau+a} dR(x) = O\left(\frac{1}{\tau^r}\right)\\ \int\limits_{+\tau-a}^{+H} dR(x) = O\left(\frac{1}{\tau^r}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (H \geqslant \tau > 0), \tag{10}$$

где a—произвольное ограниченное число. Положим еще, что для интеграла:

$$I_\lambda = \int\limits_{-\tau}^{+\tau} e^{i\lambda^{-1}\pi x} dR(x), \tag{11}$$

где λ—вещественное ограниченное число, справедливо равенство:

$$I_\lambda = O\left(\frac{1}{\tau^r}\right). \tag{12}$$

В самом деле,

$$I_\lambda = \int\limits_{-\tau-\lambda}^{+\tau-\lambda} e^{i\lambda^{-1}\pi x} dR(x+\lambda) = -\int\limits_{-\tau}^{+\tau} e^{i\lambda^{-1}\pi x} dR(x+\lambda) +$$

$$+\int\limits_{\tau-\lambda}^{\tau} e^{i\lambda^{-1}\pi x} dR(x+\lambda) - \int\limits_{-\tau-\lambda}^{-\tau} e^{i\lambda^{-1}\pi x} dR(x+\lambda).$$

Сложив это равенство с равенством (11) и использовав (10), получим легко:

$$2I_\lambda = \int\limits_{-\tau}^{+\tau} e^{i\lambda^{-1}\pi x} d[R(x) - R(x+\lambda)] + O\left(\frac{1}{\tau^r}\right).$$

Применив далее интегрирование по частям и так называемую вторую теорему о среднем значении интеграла, придем окончательно к результату (12).

Итак, если

$$|\alpha|, |\alpha + T| \geqslant \tau$$

и отношение $\frac{T}{k}$ ограничено, то для величин (3) имеем:

$$\zeta_k = O\left(\frac{1}{\tau^r}\right). \tag{13}$$

Результаты этого параграфа дают возможность в случае, если функции $P(x)$, $Q(x)$ суть функции распределения вероятностей типа $R(x)$, заменить формулы (9) и (9′) соответственно следующими:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{x} dQ(x) - \int\limits_{-\infty}^{x} dP(x)\right| < \left(\frac{TM}{n} + \zeta\right)(A_1 + B_1 \log n) + O\left(\frac{1}{\tau^r}\right), \tag{14}$$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{x} dQ(x) - \int\limits_{-\infty}^{x} dP(x)\right| < \frac{T}{n}(AM + BN) + \zeta(C + D\log n) + O\left(\frac{1}{\tau^r}\right) \tag{14'}$$

$$(|\alpha|, |\alpha + T| \geqslant \tau).$$

§ 3. **Пример.** Пусть

$$dP(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$2\tau = T, \quad \alpha = -\frac{T}{2}, \quad r = 2,$$

а $Q(x)$ есть функция распределения суммы:

$$x = x_1 + x_2 + \cdots = \sum_j x_j$$

несвязанных переменных $x_1, x_2, \ldots$, причем

$$E(x_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_j E(x_j^2) = 1,$$

$$\sum_j E(|x_j|^3) = \varepsilon < \frac{1}{2}$$

[$E(\ )$—математическое ожидание].

Вычислим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ilx} dQ(x) = \prod_j E(e^{ilx_j}) = \prod_j \left\{1 - \frac{l^2}{2} E(x_j^2) + \theta_j l^3 E(|x_j|^3)\right\}$$

$$(|\theta_j| < 1, \quad -1 \leqslant l \leqslant +1).$$

Применяя в разложении логарифма этого произведения неравенство Hölder'а, получаем:

$$\int_{\infty}^{+\infty} e^{ilx} dQ(x) = e^{-\frac{l^2}{2}} + O(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ilx} dP(x) = O(\varepsilon).$$

Отсюда выводим:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos k\pi\left(\frac{x}{T} - \frac{1}{2}\right) dQ(x) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos k\pi\left(\frac{x}{T} - \frac{1}{2}\right) dP(x) + O(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

для $k \leqslant \left[\frac{T}{\pi}\right]$.

Применив теперь формулу (14) или (14′) при

$$T = \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \quad n = \left[\frac{1}{\xi\sqrt{\xi}}\right],$$

получим:

$$\int_{-\infty}^{x} dQ(x) - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = O(\varepsilon \log \varepsilon). \tag{15}$$

Введя величину

$$\eta_\delta = \sum_j E(|x_j|^{2+\delta}) \qquad (0 < \delta \leqslant 1),$$

можно вывести равенство несколько более сильное:

$$\int_{-\infty}^{x} dQ(x) - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = O(\eta_\delta). \tag{16}$$

Этим доказана теорема Ляпунова с аппроксимацией наивысшего возможного порядка.

Институт математики
Академии Наук УССР.

Поступило
28 XI 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Krawtchouk, C. R., **196**, 739. [2] М. Кравчук, Журнал Інституту математики Академии Наук УССР, № 1 (1935).