Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 8

АСТРОНОМИЯ

Н. Ф. РЕЙН

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ВИТТЕКЕРА, СВЯЗАННОМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ ТРЕХ ТЕЛ

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 13 IV 1937)

В своей интересной заметке ([1]) Виттекер между прочим показывает что если B есть периодическая траектория ограниченной проблемы трех тел:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

то имеет место следующее соотношение:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln G^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ln G^2)\right] dx\, dy = -\frac{nT}{\pi}, \tag{2}$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln G^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ln G^2)\right] dx\, dy = -1 - \frac{nT}{\pi}, \tag{2'}$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln G^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ln G^2)\right] dx\, dy = -2 - \frac{nT}{\pi}, \tag{2''}$$

где $G^2 = U + h$ (h—постоянная интеграла Якоби), T—синодический период обращения и где интеграл распространен на площадь, заключенную внутри траектории B. В первом случае (2) внутри траектории заключены оба притягивающих центра, во втором (2')—только один и в третьем (2'')—ни одного. При выводе (2), (2'), (2'') Виттекер пользовался между прочим тем, что на траектории B должно быть соотношение:

$$\frac{G}{\rho} + \cos\varphi\frac{\partial G}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{n}{\sqrt{2}} = 0, \tag{3}$$

где ρ—радиус кривизны траектории и φ—угол, образованный нормалью к траектории с осью x.

Формулы (2), (2'), (2'') до сих пор остались неиспользованными, в то время как нам кажется, что их использование могло бы принести большую пользу при изучении периодических траекторий проблемы (1) и в особенности семейств этих траекторий. В частности представляли бы значительный интерес конкретные приложения формулы Виттекера к изучению того богатого материала, который дают блестящие исследования Копенгагенской школы. Насколько нам известно однако, в литературе до сих пор не было отмечено ни то, что соотношения (2), (2′), (2″) содержат ошибку, ни то, что даже если бы они и не были ошибочными, то были бы справедливы только для периодических траекторий прямого синодического движения.

Целью настоящей заметки является дать вывод исправленной формулы Виттекера как для прямых, так и для обратных синодических движений. В конце заметки мы позволяем себе указать некоторое дополнительное соотношение, относящееся к случаю, не затронутому Виттекером.

Предположим прежде всего, что B представляет собой замкнутую простую и правильную кривую, т. е. что она делает простой оборот и не содержит на себе особых точек; тогда эта траектория будет делить всю плоскость на две части. Условимся называть часть плоскости внутренней по отношению к B, если радиус-вектор, проведенный из любой точки этой части плоскости, совершает при обходе точки вдоль траектории полный оборот; часть плоскости, не являющуюся внутренней, будем называть наружной. Условимся также называть наружной нормалью к траектории ту часть нормали, которая направлена в наружную часть плоскости. Тогда B будет называться траекторией прямого синодического движения, если направление скорости в каждой точке получается вращением вектора наружной нормали на угол $+\frac{\pi}{2}$, причем положительным направлением отсчета углов считается направление, в котором движутся конечные массы в абсолютных осях, или направление вращения подвижных осей (x, y). Траектория B будет называться траекторией обратного синодического движения, если направление скорости в каждой точке получается вращением вектора наружной нормали на угол $-\frac{\pi}{2}$.

Предположим теперь, что внутри B нет точек кривой

$$U + h = 0 \tag{4}$$

или кривой нулевой скорости, и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\ln(U+h)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[\ln(U+h)]\right\}dx\,dy, \tag{5}$$

распространенный на внутреннюю по отношению к B часть плоскости. Введя обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\ln(U+h)] = Q;\quad \frac{\partial}{\partial y}[\ln(U+h)] = -P, \tag{6}$$

представим интеграл (5), пользуясь формулой Грина, в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B}(P\,dx + Q\,dy) - \lim\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}(P\,dx + Q\,dy) - \lim\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma'}(P\,dx + Q dy), \tag{7}$$

где γ и γ'—малые круги, заключающие притягивающие массы. Интегралы по контурам γ и γ' включаются в эту формулу только в том случае, если притягивающие массы имеются внутри траектории.

До сих пор наша выкладка ничем не отличалась от выкладки Виттекера; для дальнейшего преобразования мы вводим взамен употребленной Виттекером неправильной формулы (3) следующее соотношение, которое действительно имеет место на траектории

$$\frac{\sqrt{U+h}}{\rho} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{U+h} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{U+h} \pm n\sqrt{2} = 0. \tag{8}$$

Справедливость уравнения (8) следует из того, что оно представляет собой запись условия совпадения двух кривых: 1) геометрического места соприкосновений высшего порядка траекторий проблемы (1) с линиями топографической системы ([2]) и 2) одной из линий этой системы (в данном случае линией B). А это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы B было траекторией проблемы (1) ([1]). В силу того, что проблема (1) является проблемой необратимой, условие (8) имеет различный вид для траекторий прямого и обратного синодического движения; верхний знак (+) соответствует тому случаю, когда B является траекторией прямого синодического движения, нижний знак (—), когда B есть траектория обратного синодического движения. Уравнение (8) может быть также получено как условие равенства нулю вариации интеграла действия Молертюи (способ вывода, использованный Виттекером).

Пользуясь выражением (8) и преобразуя подинтегральную функцию первого из интегралов формулы (7) аналогично тому, как это сделано у Виттекера ([1]), мы получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B}(P\,dx+Q\,dy)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B}(2\,d\varphi\pm 4n\,dt)=-2\mp\frac{2nT}{\pi}\,. \tag{9}$$

Что касается остальных двух криволинейных интегралов, входящих в (7), то, как это показано Виттекером ([1]), в пределе каждый из них равен —1.

Таким образом теорема Виттекера, сформулированная им в конце интересующей нас заметки, в своем исправленном виде должна читаться следующим образом:

Если B есть правильная, простая и замкнутая траектория проблемы (1), не содержащая внутри себя точек кривой нулевой скорости (4), то интеграл (5), распространенный по внутренности B, имеет значение:

$$1)\mp\frac{2nT}{\pi},\quad \text{или } 2)-1\mp\frac{2nT}{\pi},\quad \text{или } 3)\ -2\mp\frac{2nT}{\pi}, \tag{10}$$

в зависимости от того, заключает ли рассматриваемая траектория внутри себя: 1) два притягивающих центра, 2) один, или 3) ни одного. При этом верхний знак всюду соответствует случаю, когда B есть траектория прямого синодического движения, а нижний знак соответствует случаю, когда B есть траектория обратного синодического движения.

Все предыдущее относилось к тому случаю, когда внутри траектории нет точек кривой нулевой скорости (4). Если же h таково, что кривая нулевой скорости существует и имеет ветви, расположенные внутри траектории, то в этом случае предыдущие рассуждения теряют свою силу. Однако нетрудно видеть, что для таких орбит будут иметь место аналогичные формулы. Не разбирая всех возможных случаев, мы даем ниже разбор одного из простейших случаев, относящегося к случаю далеких периодических орбит, охватывающих систему конечных масс и точек либрации.

Предположим, что B' есть такая траектория и что кривая нулевой скорости (4) расположена целиком внутри B'. Будем предполагать, что B' удовлетворяет всем прочим условиям, выполнение которых мы требовали по отношению к B в предыдущем случае. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S'}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\ln(U+h)]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\ln(U+h)]\right\}dx\,dy, \tag{11}$$

распространенный на часть плоскости, внешнюю по отношению к замкнутой траектории B'. Преобразуем его по формуле Грина, обозначая через γ'' круг большого радиуса R с центром в центре инерции и заключающий внутри себя траекторию B'. Мы получим, пользуясь обозначениями (6):

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{B'}(P\,dx+Q\,dy)+\lim\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma''}(P\,dx+Q\,dy). \tag{12}$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma''}(P\,dx+Q\,dy)=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma''}\frac{1}{U+h}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\,dy-\frac{\partial U}{\partial y}\,dx\right). \tag{13}$$

Для достаточно большого радиуса R мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&U+h=\frac{n^2}{2}(x^2+y^2)+h+\ldots,\\
&\frac{\partial U}{\partial x}=n^2x+\ldots,\\
&\frac{\partial U}{\partial y}=n^2y+\ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

откуда следует, что интеграл (13) может быть представлен в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma''}\left(\frac{x}{R^2}\,dy-\frac{y}{R^2}\,dx\right)+\ldots, \tag{15}$$

где ненаписанные члены стремятся к нулю при R, стремящемся к бесконечности. Выполняя интеграцию и переходя к пределу при R, стремящемся к бесконечности, мы получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma''}(P\,dx+Q\,dy)=2. \tag{16}$$

Если же принять во внимание, что, как и в предыдущем случае, на траектории B' должно иметь место соотношение (8), и провести ту же выкладку, то мы придем в рассматриваемом случае к формуле:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{S'}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\ln(U+h)]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\ln(U+h)]\right\}dx\,dy=4\pm\frac{2nT}{\pi}, \tag{17}$$

где снова верхний знак соответствует траектории прямого синодического движения, а нижний знак—траектории обратного синодического движения. Мы можем теперь следующим образом дополнить теорему Виттекера:

Если B' есть правильная, простая замкнутая траектория проблемы (1), вне которой нет точек кривой нулевой скорости (4) и притягивающих масс, то интеграл (11), распространенный на часть плоскости, внешнюю по отношению к B', имеет значение

$$4\pm\frac{2nT}{\pi}; \tag{18}$$

при этом верхний знак соответствует тому случаю, когда B' есть траектория прямого синодического движения, а нижний знак тому случаю, когда B' есть траектория обратного синодического движения.

Поступило
13 IV 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. T. Whittaker, Monthly Notices R. A. S., LXII, № 5 (1902).
[2] Н. Д. Моисеев, Тр. Гос. астр. ин-та им. Штернберга, VII, вып. 1 (1936).