Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 8

*МАТЕМАТИКА*

С. Г. МИХЛИН

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*(Представлено академиком И. М. Виноградовым 29 IV 1937)*

Если к обеим частям сингулярного интегрального уравнения

$$L(\varphi, \lambda) = \varphi(x) - \frac{\lambda b(x)}{2\pi} V.P. \int_0^{2\pi} \varphi(s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds = f(x) \tag{1}$$

применить операцию

$$M(\psi, \lambda) = \frac{1}{1+\lambda^2 b^2}(x) \left[ \psi(x) + \frac{\lambda b(x)}{2\pi} V.P. \int_0^{2\pi} \psi(s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds \right] + t(\psi)^* \tag{2}$$

то уравнение (1) сведется к уравнению Фредгольма (1). Это уравнение однако не будет в общем случае эквивалентно уравнению (1).

В настоящей заметке мы займемся вопросом о том, при каких условиях уравнение (1) может быть сведено к эквивалентному уравнению Фредгольма. В уравнении (1) $b(x)$—комплексная функция с периодом $2\pi$, удовлетворяющая условию Липшитца; $f(x)$ есть сумма известной функции и линейного вполне непрерывного в $L_2$ оператора; $\lambda$—численный параметр.

Функциональная операция

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} V.P. \int_0^{2\pi} \varphi(s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds, \tag{3}$$

как известно, может быть определена в пространстве $L_2$. Можно это сделать например с помощью известных формул:

$$p(1) = 0; \quad p(e^{imx}) = \begin{matrix} +ie^{imx}, & m > 0, \\ -ie^{imx}, & m < 0, \end{matrix} \tag{4}$$

$$p(\varphi) = \sum \varphi_m p(e^{imx}), \quad \text{если} \quad \varphi = \sum \varphi_m e^{imx}.$$

Очевидно $p(\varphi)$—линейный оператор в $L_2$ с нормой, равной 1, и

$$\| b(x) p(\varphi) \| \leqslant \max |b(x)|. \tag{5}$$

* $t(\psi)$—любой вполне непрерывный линейный оператор.

Проведем в комплексной плоскости $\lambda$ кривые:

$$\lambda = +\frac{i}{b(x)}; \quad \lambda = -\frac{i}{b(x)}. \tag{6}$$

Кривые (6) разбивают плоскость $\lambda$ на некоторое число областей. Одна из этих областей, $D_0$, содержит точку $\lambda = 0$ (эта область всегда существует). Далее, одна из областей, $D_\infty$, может содержать $\lambda = \infty$, и наконец могут встретиться области $D$, не содержащие ни той, ни другой точки.

Теорема. *Если $\lambda$ принадлежит $D_0$ или $D_\infty$, то уравнение* (1) *можно свести к эквивалентному уравнению Фредгольма.*

Будем решать уравнение (1) методом последовательных приближений, полагая

$$\varphi_0(x) = f(x); \quad \varphi_n(x) = f(x) + \lambda b(x) p(\varphi_{n-1}).$$

Этот процесс сходится в круге $|\lambda| < \frac{1}{\max|b(x)|}$, лежащем в области $D_0$, и приводит к уравнению Фредгольма, эквивалентному (1). Пусть теперь $\lambda = \lambda^*$ лежит внутри $D_0$, но вне указанного круга. Внутри этого круга возьмем точку $\lambda_0$. Соединим точки $\lambda_0$ и $\lambda^*$ линией $l$, целиком лежащей внутри $D_0$. Уравнение (1) перепишем в виде:

$$\varphi(x) - \lambda_0 b(x) p(\varphi) = f(x) + (\lambda - \lambda_0) b(x) p(\varphi). \tag{7}$$

Решая (7), придем к эквивалентному ему уравнению

$$\varphi(x) - \frac{(\lambda - \lambda_0) b(x)}{1 + \lambda\lambda_0 b^2(x)} p(\varphi) = f_1(x). \tag{8}$$

Здесь $f_1(x)$ есть опять сумма известной функции и вполне непрерывного оператора. Нетрудно видеть, что уравнение (8) решается методом последовательных приближений для значений $\lambda$, лежащих в круге:

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{d}{B + \Lambda B^2} = R. \tag{9}$$

Здесь $B = \max|b(x)|$; $\Lambda = \max|\lambda|$ вдоль кривой $l$, а $d = \min|1 + \lambda^2 b^2(x)|$ вдоль той же кривой. Возьмем теперь на кривой $l$ точку $\lambda_1$, лежащую внутри круга (9), и перепишем (8) в виде:

$$\varphi(x) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_0) b(x)}{1 + \lambda_1\lambda_0 b^2(x)} p(\varphi) = \left[\frac{(\lambda - \lambda_0) b(x)}{1 + \lambda\lambda_0 b^2(x)} - \frac{(\lambda_1 - \lambda_0) b(x)}{1 + \lambda_1\lambda_0 b^2(x)}\right] p(\varphi) + f_1(x).$$

Решим это уравнение методом последовательных приближений. Можно показать, что это приведет к уравнению

$$\varphi(x) - \frac{(\lambda - \lambda_1) b(x)}{1 + \lambda\lambda_1 b^2(x)} p(\varphi) = f_2(x). \tag{10}$$

Процесс последовательных приближений для уравнения (10) сходится внутри круга

$$|\lambda - \lambda_1| < R \tag{11}$$

и приводит к уравнению Фредгольма, эквивалентному уравнению (1). Рассуждая далее таким же образом, мы найдем, что и при $\lambda = \lambda^*$ уравнение (1) можно свести к эквивалентному уравнению Фредгольма.

Если существует область $D_\infty$, то $b(x)$ не принимает значения нуль. Совершим над обеими частями уравнения (1) операцию

$$\frac{1}{\lambda b(x)}\left[p(\psi)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(s)\,ds\right] \tag{12}$$

и положим $\lambda=\frac{1}{\lambda'}$. Это переведет (1) в эквивалентное уравнение

$$\varphi(x)+\frac{\lambda'}{b(x)}\,p(\varphi)=f'; \tag{13}$$

Область $D_\infty$ преобразуется при этом в область типа $D_0$, расположенную в плоскости $\lambda'$. Наша теорема тем самым доказана.

Из наших рассуждений нетрудно усмотреть, что уравнение (1) можно свести к эквивалентному Фредгольмову уравнению, выполнив над обеими его частями операцию (2) при подходящем выборе вполне непрерывного оператора $t(\psi)$.

Относительно областей $D$ можно доказать следующую теорему:

*Пусть $D^{(0)}$—одна из областей $D$ и $\lambda^{(0)}$—точка внутри $D^{(0)}$. Пусть существует такой оператор*

$$M(\psi)=\mu(x)\,\psi(x)+\upsilon(x)\,p(\psi)+t(\psi), \tag{14}$$

[$t(\psi)$—*некоторый непрерывный линейный оператор*], *что уравнение*

$$M\left[L(\varphi,\lambda^{(0)})\right]=M(f)$$

*есть уравнение Фредгольма, эквивалентное уравнению*

$$L(\varphi,\lambda^{(0)})=f.$$

*Тогда уравнение* (1) *эквивалентно некоторому уравнению Фредгольма во всей области* $D^{(0)}$.

Аналогичную задачу можно поставить и для сингулярного интегрального уравнения с двумя независимыми переменными:

$$L(\varphi)=a(M)\,\varphi(M)+V.P.\frac{1}{2\pi}\iint\varphi(M_1)\frac{f(M,\psi)}{R^2}\,dx_1\,dy_1=F(M). \tag{15}$$

Здесь интеграл взят по всей плоскости; $R$ и $\psi$—полярные координаты точки $M_1$ относительно полюса $M$; далее

$$\varphi(M)=O\left(\frac{1}{x^2+y^2+1}\right); \tag{16}$$

$F(M)$ есть сумма известной функции и вполне непрерывного линейного оператора; наконец

$$f(M,\psi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(M)\,e^{in\psi}\qquad [a_0(M)\equiv 0]\,^*.$$

Известны необходимые и достаточные условия ([2]), ([3]), при которых применением операции вида:

$$M(\chi)=b(M)\,\chi(M)+V.P.\frac{1}{2\pi}\iint\chi(M_1)\frac{f_1(M,\psi)}{R^2}\,dx_1\,dy_1+t(\chi)\,^{**}. \tag{17}$$

* На $f(M,\psi)$ налагаются некоторые дополнительные условия [см. ([3])].

** $t(\chi)$ означает любой вполне непрерывный оператор.

к обеим частям уравнения (15), это последнее сводится к уравнению Фредгольма *. Здесь мы приведем без доказательства основные новые результаты, полученные нами для уравнений типа (15):

1. *Функциональная операция* (15) *может быть определена в пространстве функций, удовлетворяющих условию* (16) *и суммируемых с квадратом по всей плоскости. Норма этой операции не превосходит величины*

$$\max|a(M)|+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\max|a_n(M)|}{|n|}. \tag{18}$$

2. *Пусть существует операция типа* (17) *такая, что уравнение*

$$M[L(\varphi)]=M(F) \tag{19}$$

*есть уравнение Фредгольма. Тогда можно так подобрать* $t(\chi)$, *что уравнения* (15) *и* (19) *будут эквивалентны.*

Сейсмологический институт
Академии Наук СССР.
Москва.

Поступило
29 IV 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Noeter, Math. Ann., **82**, 41—63, специально § 44—46 (1921). [2] С. Г. Михлин, ДАН, II (XI), № 1 (87) (1936). [3] С. Г. Михлин, Матем. сб., 1 (43); 4, 535—551 (1936).

* Не обязательно к эквивалентному.