Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 8

МАТЕМАТИКА

А. Л. ШАГИНЯН

К ТЕОРИИ ВЗВЕШЕННЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ НА ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 23 IV 1937)

Пусть B—односвязная ограниченная область плоскости комплексного переменного x, имеющая общую границу с областью, содержащей бесконечно далекую точку.

Пусть $q(x)$—функция, регулярная внутри B и такая, что

$$\iint\limits_B |q(x)|^2 d\sigma < \infty,$$

причем интеграл берется по открытой области B. Такой класс функций назовем классом B_2. Наконец обозначим через A_q класс функций $f(x)$, регулярных внутри B и таких, что

$$\iint\limits_B |q(x)|^2 \cdot |f(x)|^2 d\sigma < \infty.$$

Ставится задача: возможно ли при данной весовой функции $q(x)$ из B для любой функции $f(x)$ из A_q построить последовательность полиномов $Q_n(x)$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_B |q(x)|^2 \cdot |f(x) - Q_n(x)|^2 d\sigma = 0. \tag{1}$$

Задача эта очевидно равносильна задаче о полноте в классе A_q ортогональных в области B полиномов при весе $|q(x)|^2$.

В этой заметке будут указаны некоторые условия, при которых эта полнота имеет место. Сначала мы будем предполагать, что $q(x)$ не имеет нулей внутри B.

Теорема 1. *Для существования* (1) *необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность полиномов $R_n(x)$ таких, что*

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_B |q(x)|^2 \cdot \left|\frac{1}{q(x)} - R_n(x)\right|^2 d\sigma = 0. \tag{2}$$

т. е. необходимо и достаточно, чтобы полнота имела место для $\dfrac{1}{q(x)}$.

Известно, что если $\vartheta(x)$ из B_2, то существует такая последовательность полиномов $S_n(x)$, что

$$\lim_{n\to\infty}\iint_B |\vartheta(x)-S_n(x)|^2\,d\sigma=0\ \ (^1).$$

По условию $q(x)f(x)$ из B_2, и следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\iint_B |q(x)|^2\cdot\left|f(x)-\frac{S_n(x)}{q(x)}\right|^2 d\sigma=0.$$

Непосредственно ясно, что условие (2) дает возможность заменить в последнем равенстве $\frac{S_n(x)}{q(x)}$ последовательностью полиномов.

С другой стороны условие (2) необходимо, так как $q(x)f(x)$ из B_2, если $f(x)=\frac{1}{q(x)}$ * назовем классом (D)—класс функций $\varphi(x)$, регулярных внутри B и таких, что $\varphi(x)$ можно внутри B (т. е. в каждой замкнутой области, лежащей внутри B) равномерно аппроксимировать с любой степенью точности функциями, ограниченными по модулю внутри B. Этот класс был вполне охарактеризован В. И. Смирновым для случая круга (2).

Теорема 2. *Если* $q(x)\subset B_2$ *и* $\frac{1}{q(x)}\subset(D)$, *то имеет место* (2), *т. е. полнота для класса* A_q.

Пусть $r_n(x)$—функции для $\frac{1}{q(x)}$, упомянутые в определении класса (D). Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла для ограниченных функций следует

$$\lim_{n\to\infty}\iint_B |q(x)|^2\cdot\left|\frac{1}{q(x)}-r_n(x)\right|^2 d\sigma=0.$$

С другой стороны, ограниченные по модулю функции $r_n(x)$ можно равномерно аппроксимировать с любой степенью точности внутри B ограниченными же полиномами $R_n(x)$ (1).

Применяя неравенство $|a+b|^2\leqslant 2(|a|^2+|b|^2)$ и теорему о предельном переходе в том случае, когда подинтегральные функции по модулю не превышают некоторой суммируемой функции, мы и получаем формулу (2). Например в случае круговой области $|z|<1$ условия этой теоремы совместимы для весовых функций с суммируемым предельным значением модуля $|q(e^{i\alpha})|$, которые могут быть представлены в виде

$$q(z)=e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lg|q(e^{i\alpha})|\cdot\frac{e^{i\alpha}+z}{e^{i\alpha}-z}d\alpha}. \tag{3}$$

---

* Условия, аналогичные (2), были даны для любых односвязных областей А. И. Маркушевичем.

Так как в этом случае $\frac{1}{q(z)}$ принадлежит классу (D) и

$$\lim_{r\to 1}\int\limits_0^{2\pi} |q(re^{i\alpha})|\, d\alpha < \infty,$$

а из этого согласно одной теореме (³) Hardy-Littlewood'а следует принадлежность $q(z)$ классу B_2.

Условия теоремы (2) лишь достаточны для полноты. Нетрудно привести примеры, когда полнота имеет место, а функция $\frac{1}{q(z)}$ не из (D). Положим, что B есть круг $|z|<1$ и что $w=\varphi(z)$ преобразует $|z|<1$ в область, ограниченную кривой Жордана. При этом, если мы за весовую функцию в круге возьмем $\varphi'(z)$, то полнота наверное будет иметь место, но существуют такие области Жордана, для которых предельные значения $\varphi'(z)$ не существуют на совокупности точек положительной меры, и в этих случаях $\frac{1}{\varphi'(z)}$ не может принадлежать D.

Приведем еще одно достаточное условие, при котором имеет место полнота в случае круга $|z|<1$.

Теорема 3. *Если* $q(z)$ *из* B_2 *и*

$$\lim_{\delta\to 1-0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\left|\frac{q(z)}{q(\delta z)}\right|^2 d\sigma = 1, \qquad (\delta>0) \tag{4}$$

то имеет место полнота.

В самом деле, из (2) следует, что

$$\lim_{\delta\to 1-0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}|q(z)^2|\cdot\left|\frac{1}{q(z)}-\frac{1}{q(\delta z)}\right|^2 d\sigma = \lim_{\delta\to 1-0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\left|1-\frac{q(z)}{q(\delta z)}\right|^2 d\sigma = 0,$$

с другой стороны, при фиксированном $0<\delta<1$ функцию $\frac{1}{q(\delta z)}$ можно с любой степенью точности аппроксимировать полиномом в круге $|z|<$ <1, откуда и следует (2).

Этому условию удовлетворяют например функции вида $\prod\limits_1^n e^{\frac{1}{z-\alpha_i}}$, где α_i—точки окружности $|z|=1$.

Для полиномов с нулями на окружности $|z|=1$ и вне ее также выполняется условие (3).

Легко видеть, что конечное число внутренних нулей функции $q(x)$ не влияет на (1), т. е. на полноту. Отсюда следует полнота для весовых функций полиномиального вида.

Можно также показать, что если в круге $|z|<1$ $q(z)=1+a_1z+$ $+a_2z^2+\ldots$ принадлежит классу B и $\frac{q(z)}{z}$ отображает круг $|z|<1$ на звездообразную окрестность бесконечно далекой точки, то полнота будет иметь место.

В заключение заметим, что все предыдущие результаты очевидно справедливы и при аппроксимации в среднем с любым положительным показателем.

Научно-исследовательский институт математики и механики Ленинградского государственного университета им. А. С. Бубнова.

Поступило 23 IV 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Farrel, Bull. of the Amer. M. S., XL, № 12 (1934) and № 10 (1935). [2] В. И. Смирнов, Журн. Ленинградского физико-математ. о-ва, II, № 2 (1930). [3] Hardy-Littlewood, Proceed. L. M. S., 26, part 4 (1927).