Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 8

МАТЕМАТИКА

Генрих ХИЛЬМИ

О МЕТРИЧЕСКИ НЕРАЗЛОЖИМЫХ МНОЖЕСТВАХ ДВИЖЕНИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 23 IV 1937)

1. В этой заметке мы изучаем движения, содержащиеся в метрически неразложимых множествах. Мы оцениваем меру множеств различных типов движений, содержащихся в метрически неразложимых множествах, не пользуясь предположением о существовании интегрального инварианта, обычным в исследованиях подобного рода.

2. Мы будем рассматривать движения точек в метрическом пространстве M; через $f(p, t)$ мы будем обозначать положение точки $p \subset M$ в момент времени t; $f(p, 0) = p$. Мы будем предполагать, что эти движения образуют однопараметрическую группу, т. е. $f[f(p, t)\ \tau] = f(p, t+\tau)$. Множество всех точек вида $f(p, t)$ при фиксированном p и для всех действительных значений t мы будем называть орбитой, а точку p ее начальной точкой. Множество всех точек вида $f(p, t)$ при фиксированном p и для всех значений $t \geqslant 0$ $(t \leqslant 0)$ мы будем называть положительной (отрицательной) полуорбитой, а точку p начальной точкой этой полуорбиты.

Далее, мы предположим, что через каждую точку $p \subset M$ проходит только одна орбита.

Если A—произвольное подмножество M, то символом $f(A, t)$ мы будем обозначать множество $\{f(p, t)\}$, где $p \subset A$.

Мы назовем множество $A \subset M$ положительно (отрицательно) инвариантным, если из условия $p \subset A$ следует, что $f(p, t) \subset A$ для всех $t \geqslant 0$ $(t \leqslant 0)$. Множество A называется инвариантным, если оно одновременно положительно и отрицательно инвариантное.

Пусть x и y — две точки множества M; символ $\rho(x, y)$ обозначает расстояние между точками x и y.

Пусть $x \subset M$ — фиксированная точка; символом $S(x, \varepsilon)$ мы будем обозначать множество всех точек $y \subset M$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \varepsilon$. Это множество мы назовем сферической окрестностью точки x радиуса ε.

Мы будем предполагать, что имеет место обычная для динамических систем непрерывная зависимость орбит от начальных условий, т. е. что для любой пары положительных чисел ε и T можно указать столь малое положительное число δ, что включение

$$f[S(p, \delta), t] \subset S[f(p, t), \varepsilon] \qquad (1)$$

справедливо для всех значений t, удовлетворяющих неравенству $|t| \leqslant T$. Кроме того мы предположим, что в пространстве M существует счетная база областей, т. е. можно указать счетное множество областей V_1, $V_2, \dots V_n, \dots$ таких, что для всякой точки $p \subset M$ и любой ее сферической окрестности S найдется область V_ν, удовлетворяющая условию $p \subset V_\nu \subset S$.

Мы предположим, что в пространстве M существует мера, обладающая свойствами меры Lebesgue'a; далее, мы предположим, что пространство M однородно (в метрическом смысле), т. е. что для всякой области $G \subset M$ выполняется условию $\operatorname{mes} G > 0$.

Мы будем рассматривать устойчивые по Poisson'у движения. Движение называется устойчивым по Poisson'у, если для всякой точки p его орбиты и для произвольных положительных чисел ε и T существуют как положительные, так и отрицательные значения t, по абсолютной величине превышающие T, такие, что $\rho[p, f(p, t)] < \varepsilon$.

3. Инвариантное измеримое множество Ω положительной меры называется метрически неразложимым, если оно не может быть представлено в виде суммы двух инвариантных множеств Ω_1 и Ω_2, каждое из которых положительной меры.

Метрически неразложимое множество Ω мы будем называть исключительным, если оно может быть представлено в виде суммы двух множеств Ω_1 и Ω_2, каждое из которых положительной меры, и одно положительно, а другое отрицательно инвариантное. В противном случае метрически неразложимое множество мы будем называть обыкновенным.

Приведем простой пример исключительного метрически неразложимого множества. Рассмотрим эвклидово пространство одного измерения, координату точек которого мы будем обозначать через x. В этом пространстве определим динамическую систему, дифференциальное уравнение движения которой напишем в виде:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2.$$

Множество точек $-1 \leqslant x \leqslant +1$ будет метрически неразложимым, мера его равна 2. Однако оно будет исключительным, так как его можно разбить на два множества $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant x < 0$, каждое из которых меры 1, причем первое из этих множеств положительно, а второе отрицательно инвариантное.

4. Теорема. *Все точки однородного обыкновенного метрически неразложимого множества Ω, за исключением множества меры нуль, расположены на орбитах устойчивых по Poisson'у движений; каждая из этих орбит всюду плотна в Ω.*

Пусть $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ — счетное множество областей базы. Обозначим через Q^1 множество точек, принадлежащих Ω, являющихся начальными точками таких положительных полуорбит, которые не будут всюду плотными в Ω. Тогда для всякой точки $p \subset Q^1$ можно указать такую область U_ν, что ни при каком $t \geqslant 0$ точка $f(p, t)$ не будет принадлежать области U_ν.

Обозначим через $Q_1^1, Q_2^1, \dots, Q_n^1, \dots$ множества точек, которые являются начальными точками полуорбит, не пересекающихся соответственно с областями $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$

Очевидно, что

$$Q^1 = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i^1. \tag{2}$$

Каждое из множеств Q_i^1 положительно инвариантно. Покажем, что каждое из множеств Q_i^1 замкнуто. Пусть q—точка, предельная для Q_i^1, и предположим, что $q \not\subset Q_i^1$. Тогда можно указать такое τ, что $f(q, \tau) \subset \subset U_i$. Вследствие непрерывной зависимости орбит от начальных условий при всяких ε и τ можно выбрать столь малое положительное число δ, чтобы

$$f[S(q, \delta), \tau] \subset S[f(q, \tau), \varepsilon]. \tag{3}$$

Пусть p^*—точка множества Q_i^1, содержащаяся в $S(q, \delta)$, тогда в силу условия (3) имеем $f(p^*, \tau) \subset U_i$, что противоречиво. Мы приходим к заключению, что каждое из множеств Q_i^1 замкнуто и следовательно измеримо. Но тогда множество Q^1 в силу соотношения (2) также будет измеримым.

Покажем, что мера множества Q^1 равна нулю. Множество Q_i^1 положительно инвариантное, поэтому множество $\Omega - Q_i^1$ будет отрицательно инвариантное множество. Из условия $\Omega - Q_i^1 \supset U_i$ следует:

$$\text{mes}\,(\Omega - Q_i^1) \geqslant \text{mes}\, U_i > 0;$$

но так как множество Ω—обыкновенное метрически неразложимое множество, то

$$\text{mes}\,(\Omega - Q_i^1) = \text{mes}\,\Omega,$$

и следовательно

$$\text{mes}\, Q_i^1 = 0.$$

Но тогда в силу соотношения (2) находим:

$$\text{mes}\, Q^1 = 0,$$

так как Q^1 есть сумма счетного числа множеств меры нуль. Аналогично докажем, что множество Q^2 всех принадлежащих Ω точек, являющихся начальными точками таких отрицательных полуорбит, которые не будут всюду плотными в Ω, также будет множеством меры нуль.

Но тогда

$$\text{mes}\,[\Omega - (Q^1 + Q^2)] = \text{mes}\,\Omega,$$

что и доказывает высказанную теорему.

Поступило
23 IV 1937.