Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 8

МАТЕМАТИКА

В. Я. КОЗЛОВ

О СВЯЗИ МЕЖДУ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТЬЮ И ЕДИНСТВЕННОСТЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 IV 1937)

Условимся называть *нуль-рядом* всякий тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1}$$

сходящийся к нулю почти всюду на $[0, 2\pi]$ и у которого не все коэффициенты равны нулю.

Существование таких рядов, играющих основную роль в проблеме об единственности разложения функции в тригонометрический ряд, было впервые установлено Д. Е. Меньшовым (1).

Целью настоящей заметки является рассмотрение вопроса о точках абсолютной сходимости у нуль-рядов. Мы докажем следующее предложение:

Теорема. *Нуль-ряд может иметь только конечное число точек абсолютной сходимости, и расстояние между каждой парой таких точек соизмеримо с* π.

Для доказательства этого предложения положим

$$A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

имеем:

$$A_n(x+h) + A_n(x-h) = 2A_n(x)\cos nh.$$

Пусть x_0—любая точка отрезка $[0, 2\pi]$. Так как ряд (1) сходится к нулю почти всюду, то для всех почти значений h сходятся к нулю оба ряда:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x_0+h) \quad \text{и} \quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x_0-h),$$

а значит и их полусумма, т. е. ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x_0)\cos nh. \tag{2}$$

Если теперь предположить, что x_0 есть точка абсолютной сходимости ряда (1), то ряд $\sum A_n(x_0)$ сходится абсолютно, а потому ряд (2) сходится равномерно относительно h. Так как его сумма равна нулю почти всюду, то из его равномерной сходимости следует, что его коэффициенты все равны нулю, т. е.

$$a_0 = 0 \quad \text{и} \quad A_n(x_0) = 0 \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

Пусть x_1—другая точка абсолютной сходимости ряда (1). Мы имеем для нее также:

$$A_n(x_1) = 0 \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

Но система уравнений:

$$A_n(x_0) = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0 = 0, \qquad A_n(x_1) = a_n \cos nx_1 + b_n \sin nx_1 = 0,$$

имеет детерминант $\sin n(x_1 - x_0)$, отличный от нуля, если $x_1 - x_0$ несоизмеримо с π, поэтому

$$a_n = 0, \quad b_n = 0.$$

Так как это верно для всякаго n, если только $x_1 - x_0$ несоизмеримо с π, то мы видим, что нуль-ряд (1) имеет все коэффициенты равными нулю, что противоречит гипотезе.

Итак, мы убедились, что любые две точки абсолютной сходимости нуль-ряда должны находиться на расстоянии, соизмеримом с π.

Покажем теперь, что на сегменте $[0, 2\pi]$ точек абсолютной сходимости не может быть бесконечное множество. Допустим обратное. Пусть

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

суть точки абсолютной сходимости ряда (1). Имеем:

$$a_n \cos nx_k + b_n \sin nx_k = 0$$

для всех целых n и $k = 0, 1, 2, \ldots$

Так как ряд (1) имеет коэффициенты, отличные от нуля, то найдется такое m, что либо a_m, либо b_m, либо оба эти коэффициента не равны нулю. Система

$$a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0 = 0, \quad a_m \cos mx_k + b_m \sin mx_k = 0$$

имеет решение, отличное от нуля. Значит, ее детерминант $\sin m(x_k - x_0)$ должен быть равен нулю. Но $\sin m(x - x_0)$ обращается в нуль только конечное число раз на любом конечном интервале. Поэтому невозможно, чтобы при всяком $k = 1, 2, \ldots$ мы имели $\sin m(x_k - x_0) = 0$. Из противоречия вытекает, что нуль-ряд может иметь лишь конечное число точек абсолютной сходимости на сегменте $[0, 2\pi]$.

Следствие. *Не существует нуль-ряда вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos p^n x + b_n \sin p^n x, \tag{3}$$

где p—целое число.

Для доказательства рассмотрим сначала ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin p^n x. \tag{4}$$

Он имеет счетное множество точек абсолютной сходимости, так как для любых целых l и k точка

$$x = \frac{2\pi l}{p^k}$$

будет такой точкой. Поэтому, если ряд (4) сходится почти всюду к нулю, то все его коэффициенты должны быть равны нулю.

Пусть теперь

$$A_n(x) = a_n \cos p^n x + b_n \sin p^n x.$$

Тогда

$$A_n(x+h) - A_n(x-h) = 2 \sin p^n h\, [b_n \cos p^n x - a_n \sin p^n x].$$

Если ряд (3) является нуль-рядом, то ряд

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} [A_n(x+h) - A_n(x-h)] = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \cos p^n x - a_n \sin p^n x] \sin p^n h$$

при постоянном x сходится к нулю для почти всех значений h. А так как это ряд типа (4), то все его коэффициенты равны нулю т. е.

$$b_n \cos p^n x - a_n \sin p^n x = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Но так как это равенство справедливо, каково бы ни было x, то

$$a_n = 0, \quad b_n = 0 \qquad (n = 1, 2 \ldots),$$

что невозможно.

Мы выделили таким образом класс рядов, которые не могут быть нуль-рядами*.

Нетрудно видеть, что предыдущие результаты легко могут быть обобщены: сохраняя все доказательства, можно было бы вместо нуль-рядов рассматривать ряды, сходящиеся к нулю лишь на счетном, всюду плотном множестве, удовлетворяющем некоторым условиям симметрии. На этом пути мы получаем такие теоремы:

I. *Если тригонометрический ряд сходится абсолютно в двух точках, расстояние которых несоизмеримо с* π, *и если он сходится к нулю на множестве, всюду плотном и симметричном относительно каждой из этих двух точек, то все его коэффициенты равны нулю.*

II. *Если тригонометрический ряд сходится абсолютно в бесконечном множестве точек и сходится к нулю в каждой точке некоторого*

---

* Эта теорема может быть также получена из одного результата A. Zygmund'а относительно лакунарных рядов ([2]).

всюду плотного множества, симметричного относительно всякой точки абсолютной сходимости, то все его коэффициенты равны нулю.

В качестве одного из следствий можно указать теорему: *если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos p^n x + b_n \sin p^n x,$$

где p—*целое число, сходится к нулю во всех точках, абсциссы которых соизмеримы с* π, *то все его коэффициенты равны нулю.*

Поступило
16 IV 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Menchoff, C. R., **163**, 433 (1916). [2] A. Zygmund, Trigonometrical Series, **119**, **122**.