Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 8

МАТЕМАТИКА

Я. ДУБНОВ и Н. ЕФИМОВ

ОБ ОСОБЕННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ И ПОВЕРХНОСТИ LIE

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 13 IV 1937)

В сообщении (1) было отмечено, что на поверхности с заданной метрикой геодезическая сеть определяется, вообще говоря, однозначно — своим чебышевским тензором; сети, представляющие исключение, названы там особенными. Не на всякой поверхности существуют особенные геодезические сети. Для того чтобы это имело место для поверхности с метрическим тензором g_{ij} и гауссовой кривизной K, необходимо и достаточно, чтобы существовал тензор τ_i, удовлетворяющий уравнению [сохранены обозначения статьи (1)]:

$$\tau_{i/j} + \tau_{j/i} - \tau_i \tau_j - 4K g_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2) \tag{1}$$

Каждому решению τ_i этого уравнения соответствует ∞^2 особенных геодезических сетей, для которых τ_i является общим чебышевским тензором. Поверхности рассматриваемого класса могут быть также охарактеризованы как такие, на которых существуют две раздельные (т. е. не имеющие общего семейства) геодезические сети с постоянным во всех точках ангармоническим отношением четырех направлений. В таком случае любая сеть, дающая с каждой из упомянутых двух сетей постоянное ангармоническое отношение, будет также геодезической*. Эти два ангармонических отношения и являются параметрами семейства, состоящего из ∞^2 особенных геодезических сетей.

Совокупность поверхностей, допускающих особенные геодезические сети, исчерпывается следующими двумя классами.

А. Если поверхность допускает особенную геодезическую сеть с чебышевским тензором ненулевого модуля ($g^{\alpha\beta}\tau_\alpha\tau_\beta \neq 0$), то квадрат ее линейного элемента может быть приведен к виду:

$$ds^2 = 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} du\, dv,$$

где ω удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}\right)^2 = \frac{1}{(u+v)^2} \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial v}.$$

* А. П. Норден в своей еще не опубликованной работе получает этот результат для неметрического случая.

Обратно, всякое решение последнего уравнения определяет метрику рассматриваемого класса. Допущение $\omega = \omega(u + v)$ приводит к уже отмеченному в статье ([1]) случаю $K = \text{const}$. Примером метрики с $K \neq \neq \text{const}$ может служить

$$ds^2 = \left[C - \frac{1}{C(u+v)^2}\right] du\, dv \qquad (C = \text{const} \neq 0).$$

B. Предположение $g^{\alpha\beta}\tau_\alpha\tau_\beta = 0$ (оставляем в стороне случай $K = 0$) совместимо с (1) только для поверхности Lie:

$$ds^2 = (u + V)\, du\, dv \qquad V = V(v) \neq \text{const}.$$

Таким образом геометрическое свойство, характеризующее поверхность Lie, состоит в том, что на ней существуют особенные геодезические сети с чебышевским тензором нулевого модуля. Общий для этих сетей чебышевский тензор может быть выражен в произвольных координатах формулой:

$$\tau_l = \frac{2}{3}(\ln K)_{/\omega}\,(\delta_l^\omega + i\varepsilon_l^{\omega}) \tag{2}$$

$(i = \sqrt{-1};\ \varepsilon_m^n = g^{n\alpha}\varepsilon_{m\alpha}$, где $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0,\ \ \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{\operatorname{Det} g_{ij}})$.

Отсюда легко получить инвариантную характеристику поверхности Lie: подставляя (2) в (1) и полагая для краткости

$$k_{jl} = 3(\ln K)_{/jl} - 2(\ln K)_{/j}(\ln K)_{/l},$$

находим:

$$2k_{jl} + i(\varepsilon_{j.}^{\omega} k_{l\omega} + \varepsilon_{l.}^{\omega} k_{j\omega}) = 2g_{jl}(9K - \Delta_1 \ln K) \tag{3}$$

(Δ_1 — первый дифференциальный параметр). Это уравнение может быть заменено двумя:

$$\Delta_1 \frac{\Delta_1 K - 18K^3}{K^{8/3}} = 0, \quad \Delta_2 \ln K = 6K$$

(Δ_2 — второй дифференциальный параметр).

Вещественная поверхность Lie характеризуется уравнением:

$$\left(K^{-\frac{2}{3}}\right)_{/ij} = \frac{2}{9} K^{-\frac{8}{3}} (\Delta_1 K - 9K^3)\, g_{ij},$$

которое равносильно двум:

$$\begin{aligned} \Delta_1 K &= 18K^3 + CK^{\frac{8}{3}} \\ \Delta_2 K &= 24K^2 + CK^{\frac{5}{3}} \end{aligned} \qquad (C = \text{const}).$$

Значениям $C = 0$ и $C \neq 0$ (в последнем случае можно преобразованием подобия сделать $C = 1$) соответствуют два класса поверхностей вращения, найденные Darboux ([2]).

Институт математики
Московского университета.

Поступило
1 IV 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Дубнов, ДАН, IV, № 1—2, 7—10 (1935). [2] G. Darboux, Théorie des surfaces, 594 (1894).