Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 8

МАТЕМАТИКА

Л. В. РОБИНСОН

СИСТЕМЫ РИКЬЕ И ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 5 V 1937)

Вильчинский вычислил коварианты и семиковарианты системы

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + p_{11}y_1' + p_{12}y_2' + q_{11}y_1 + q_{12}y_2 = 0 \\ y_2'' + p_{21}y_1' + p_{22}y_2' + q_{21}y_1 + q_{22}y_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

для преобразований:

$$\left.\begin{aligned} y_k &= \sum_{\lambda=1}^{2} \alpha_{k\lambda}(x)\,\eta_\lambda \qquad (k=1,\ 2). \\ y_k^{(l)} &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\rho=0}^{2} \binom{l}{\rho}\,\alpha_{k\lambda}^{(\rho)}\,\eta_\lambda^{(l-\rho)}, \\ x &= f(\xi)^{*} \end{aligned}\right\} \qquad (T)$$

$$(k=1,\ 2;\ l=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m),$$

где $\binom{l}{\rho}$ обозначает коэффициент при x^ρ в разложении $(1+x)^l$ (1).

Автором вычислены семитензоры, связанные с системой (1) и неизменяемые преобразованиями (T) **.

Здесь мы вычислим некоторые тензоры простого типа.

Положим, что I_1, I_2 и I_3—функции от

$$y_1,\ y_2,\ y_1',\ y_2';\ p_{ij},\ p_{ij}',\ q_{ij}$$

и что преобразование (T) меняет их следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \bar I_1 &= \Delta_{11}^2 I_1 + 2\Delta_{11}\Delta_{21}I_2 + \Delta_{21}^2 I_3, \\ \bar I_2 &= \Delta_{11}\Delta_{12}I_1 + (\Delta_{11}\Delta_{22} + \Delta_{12}\Delta_{21})I_2 + \Delta_{21}\Delta_{22}I_3, \\ \bar I_3 &= \Delta_{12}^2 I_1 + 2\Delta_{12}\Delta_{22}I_2 + \Delta_{22}^2 I_3, \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

где Δ_{ij}—миноры определителя

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

* Если речь идет о семиковариантах, то $x = f(\xi) = \xi$.

** Ковариант—только частный случай тензора.

Приведенное преобразование очевидно образует группу; тензорный характер (I) также ясен. Инфинитезимальное преобразование (I) дается равенствами:

$$
\begin{aligned}
&I_1 + \delta I_1 \equiv (1 + 2\,\Psi_{22}\delta t) I_1 - 2\,\Psi_{12}\delta t I_2, \\
&I_2 + \delta I_2 \equiv -\,\Psi_{21}\delta t I_1 + (1 + \Psi_{11}\delta t + \Psi_{22}\delta t)\, I_2 - \Psi_{12}\delta t I_3, \\
&I_3 + \delta I_3 \equiv 2\Psi_{21}\delta t I_2 + (1 + 2\Psi_{11}\delta t)\, I_3.
\end{aligned}
$$

Следуя Вильчинскому, мы видим, что

$$
\delta I_k = \sum_1^2 i \sum_1^2 j\, \Psi''_{ij}\Omega_{ij}(I_k)\delta t + \sum_1^2 i \sum_1^2 j\, \Psi'_{ij}\Psi_{ij}(I_k)\delta t +
$$

$$
+ \sum_1^2 i \sum_1^2 j\, \Psi_{ij}\, \Phi_{ij}\, (I_k)\delta t\, *,
$$

где

$$
\Omega_{ij}\,(f) \equiv 2\,\frac{\partial f}{\partial p'_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial q_{ij}} = 0,
$$

$$
\Psi_{ij}\,(f) \equiv -\,y_j \frac{\partial f}{\partial y'_i} + 2\,\frac{\partial f}{\partial p_{ij}} + \sum_{\lambda=1}^{2}\left(p_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial p'_{\lambda j}} - p_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial p'_{i\lambda}} + p_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial q_{ij}} \right) = 0,
$$

$$
\Phi_{ij}\,(f) \equiv -\,y_j \frac{\partial f}{\partial y_i} - y'_j\,\frac{\partial f}{\partial y'_i} + \sum_{\lambda=1}^{2}\left(p_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial p_{\lambda j}} - p_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial p_{i\lambda}} + \right.
$$

$$
\left. + p'_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial p'_{\lambda j}} - p'_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial p'_{i\lambda}} + q_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial q_{\lambda j}} - q_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial q_{i\lambda}} \right) = 0.
$$

Для нахождения указанных тензоров необходимо решить систему уравнений:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Omega_{ij}\,(I_k) = 0,\ \ \Psi_{ij}\,(I_k) = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2;\ k = 1,\ 2,\ 3); \\
&\Phi_{12}\,(I_1) = -2I_2,\ \ \Phi_{11}(I_1) = 0,\ \ \Phi_{22}\,(I_1) = 2I_1,\ \ \Phi_{21}\,(I_1) = 0, \\
&\Phi_{12}\,(I_2) = -I_3,\ \ \Phi_{11}\,(I_2) = I_2,\ \ \Phi_{22}\,(I_2) = I_2,\ \ \Phi_{21}\,(I_2) = -I_1, \\
&\Phi_{12}\,(I_3) = 0,\ \ \Phi_{11}\,(I_3) = 0,\ \ \Phi_{22}\,(I_3) = 2I_3,\ \ \Phi_{21}\,(I_3) = -2I_2.
\end{aligned}
\right\} \quad (\mathrm{A})
$$

Система (A) эквивалентна системе:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Omega_{ij}\,(f) = 0,\ \ \Psi_{ij}\,(f) = 0, \\
&\Phi_{12}\,(f) - 2I_2\frac{\partial f}{\partial I_1} - I_3\frac{\partial f}{\partial I_2} = 0, \\
&\Phi_{11}\,(f) + I_2\frac{\partial f}{\partial I_2} + 2I_3\frac{\partial f}{\partial I_3} = 0, \\
&\Phi_{22}\,(f) + 2I_1\frac{\partial f}{\partial I_1} + I_2\frac{\partial f}{\partial I_2} = 0, \\
&\Phi_{21}\,(f) - I_1\frac{\partial f}{\partial I_2} - 2I_2\frac{\partial f}{\partial I_3} = 0.\ (^2)
\end{aligned}
\right\} \quad (\mathrm{B})
$$

Мы можем сразу написать три решения системы:

$$
\begin{aligned}
&f_1 \equiv y_1^2 I_3 - 2y_1y_2I_2 + y_2^2 I_1, \\
&f_2 \equiv 2y_1Y'_1I_3 - 2\,(y_2Y'_1 + y_1Y'_2)\, I_2 + 2y_2Y'_2I_1, \\
&f_3 \equiv Y_1'^2I_3 - 2Y'_1Y'_2I_2 + Y_2'^2I_1,
\end{aligned}
$$

---

* Автор, вычисляя ковариaнты или тензоры, пользуется методом Ли инфинитезимальных подстановок, так же поступает и Вильчинский.

где

$$Y_1' \equiv 2y_1' + y_2p_{12} + y_1p_{11},$$
$$Y_2' \equiv 2y_2' + y_1p_{21} + y_2p_{22}.$$

Мы имеем как решение также и два семиинварианта, полученные Вильчинским:

$$I \equiv w_{11} + w_{22},$$
$$J \equiv w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}\ (^3),$$

в которых

$$w_{11} \equiv 2p_{11}' - 4q_{11} + p_{11}^2 + p_{12}p_{21},$$
$$w_{12} \equiv 2p_{12}' - 4q_{12} + p_{12}(p_{11} + p_{22}),$$
$$w_{21} \equiv 2p_{21}' - 4q_{21} + p_{21}(p_{11} + p_{22}),$$
$$w_{22} \equiv 2p_{22}' - 4q_{22} + p_{22}^2 + p_{12}p_{21}.$$

Мы имеем три относительных семиковарианта:

$$D \equiv \begin{vmatrix} y_{11} & Y_1' \\ y_{21} & Y_2' \end{vmatrix},$$

$$E \equiv w_{11}y_2^2 - w_{21}y_1^2 + (w_{11} - w_{22})\,y_1y_2,$$
$$F \equiv w_{12}Y_2'^2 - w_{21}Y_1'^2 + (w_{11} - w_{22})\,Y_1'Y_2'.$$

По ним мы составляем два абсолютных семиковарианта или решения системы (B):

$$\frac{E}{D},\quad \frac{F}{D}.$$

Таким образом общее решение (B):

$$\Phi\left(f_1,\ f_2,\ f_3,\ I,\ J,\ \frac{E}{D},\ \frac{F}{D}\right),$$

Φ — произвольные функции.

Положим

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0,$$

где Φ — произвольные функции от

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots,\ \frac{F}{D};$$

решаем уравнения относительно f_1, f_2, f_3; тогда

$$f_i = \Psi_i\left(I,\ J,\ \frac{E}{D},\ \frac{F}{D}\right),$$

Ψ_i — произвольная функция, так как Φ произвольна.

Положим

$$M \equiv \begin{vmatrix} y_1^2 & -2y_1y_2 & y_2^2 \\ 2y_1Y_1' & -2(y_2Y_1' + y_1Y_2') & 2y_2Y_2' \\ Y_1'^2 & -2Y_1'Y_2' & Y_2'^2 \end{vmatrix};$$

тогда

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{M}[M_{11}\Psi_1 + M_{21}\Psi_2 + M_{31}\Psi_3], \\ I_2 &= \frac{1}{M}[M_{12}\Psi_1 + M_{22}\Psi_2 + M_{32}\Psi_3], \\ I_3 &= \frac{1}{M}[M_{13}\Psi_1 + M_{23}\Psi_2 + M_{33}\Psi_3], \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

где M_{ij} — миноры определителя M.

Таким образом система (III) дает самое общее решение системы (A) и приводит к полной системе семитензоров типа (II) ([4]).

Мы можем написать нашу заключительную теорему. Семитензоры I будут линейными функциями Ψ, являющимися произвольными функциями от семиковариантов, вычисленных Вильчинским.

Балтимора (США).

Поступило
5 V 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Wilczynski, Projective Differential Geometry, p. 91. [2] Riquier, Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, p. 502. [3] Wilczynski, Projective Differential Geometry, p. 97. [4] Riquier, Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, p. 504, Théorème II.