Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. И. СМИРНОВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

РЕШЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ КРУГА И СФЕРЫ

В предыдущей статье [1] мы дали решение предельной задачи для волнового уравнения в случае круга и сферы. В этой заметке мы будем рассматривать аналогичные проблемы теории упругости.

Начиная с плоского случая, рассмотрим колебания части плоскости, находящейся вне окружности $r=1$, если при $t=0$ имеются нулевые начальные условия, и на окружности $r=1$ мы имеем заданные смещения. Составляющие смещения на полярные координатные оси (r, θ) выражаются формулами:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{1}$$

где φ и ψ должны удовлетворять уравнениям:

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi, \quad b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Delta \psi \tag{2}$$

и $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ суть скорости распространения продольных и поперечных волн. Предположим, что предельные условия имеют вид:

$$u_r|_{r=1} = u_m(t)\, e^{im\theta}, \qquad u_\theta|_{r=1} = v_m(t)\, e^{im\theta}. \tag{3}$$

Возьмем решения уравнений (2):

$$\varphi_m = \int_0^{t-ar+a} \Phi_m(\tau) \sqrt{\frac{(t-\tau+a)^2}{a^2r^2} - 1}\, U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+a}{ar}\right) d\tau \times e^{im\theta},$$

$$\psi_m = \int_0^{t-br+b} \Psi_m(\tau) \sqrt{\frac{(t-\tau+b)^2}{b^2r^2} - 1}\, U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+b}{br}\right) d\tau \times e^{im\theta},$$

где

$$U_m(x) = \frac{1}{(m+1)^2} T'_{m+1}(x); \quad T_m(x) = \cos(m \arccos x).$$

Для неизвестных комплексных функций $\Phi_m(\tau)$ и $\Psi_m(\tau)$ мы имеем в силу предельных условий систему интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&-\int_0^t \Phi_m(\tau)\frac{(t-\tau+a)\,T_m\left(\dfrac{t-\tau+a}{a}\right)}{\sqrt{(t-\tau+a)^2-a^2}}\,d\tau+\\
&+im\int_0^t \Psi_m(\tau)\sqrt{\frac{(t-\tau+b)^2}{b^2}-1}\,U_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau=u_m(t),\\
&im\int_0^t \Phi_m(\tau)\sqrt{\frac{(t-\tau+a)^2}{a^2}-1}\,U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)d\tau+\\
&+\int_0^t \Psi_m(\tau)\frac{(t-\tau+b)\,T_m\left(\dfrac{t-\tau+b}{b}\right)}{\sqrt{(t-\tau+b)^2-b^2}}\,d\tau=v_m(t).
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Мы будем рассматривать сейчас случай пространства только в предположении осевой симметрии. Пусть $(u_r, u_\vartheta, u_\theta)$—составляющие смещения на сферические оси (r, ϑ, θ), и предположим сначала, что $u_\theta=0$. В этом случае, пользуясь формулами теории упругости, легко показать, что

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}+\frac{\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\psi,\quad u_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r}\psi,$$

где φ и ψ не зависят от θ и должны удовлетворять уравнениям:

$$a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\Delta\varphi;\tag{5}$$

$$b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\Delta\psi-\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\psi.\tag{6}$$

Предположим, что предельные условия имеют вид:

$$u_r|_{r=1}=u_m(t)\,P_m(\cos\vartheta),\quad u_\vartheta|_{r=1}=v_m(t)\sin\vartheta\,P'_m(\cos\vartheta),$$

где $P_m(x)$—полиномы Лежандра. Для уравнения (5) берем решения вида [1]:

$$\varphi_m=\int_0^{t-ar+a}\Phi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+a}{ar}\right)d\tau\times P_m(\cos\vartheta),\tag{7}$$

где

$$Q_{m+1}(x)=\int_1^x P_m(x)\,dx.$$

Для уравнения (6) основные решения имеют вид:

$$Q_{m+1}\left(\frac{t}{br}\right)\sin\vartheta\,P'_m(\cos\vartheta),$$

и мы положим:

$$\psi_m=\int_0^{t-br+b}\Psi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{br}\right)d\tau\times\sin\vartheta P'_m(\cos\vartheta).\tag{8}$$

Подставляя в предельные условия, мы будем иметь систему интегральных уравнений для функций $\Phi_m(\tau)$ и $\Psi_m(\tau)$:

$$\left.\begin{aligned}
-\int_0^t \Phi_m(\tau)\,\frac{t-\tau+a}{a}\,P_m\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)d\tau\, + \\
+\, m(m+1)\int_0^t \Psi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau = u_m(t), \\
-\int_0^t \Phi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)d\tau\, + \\
+\int_0^t \Psi_m(\tau)\left[\frac{t-\tau+b}{b}\,P_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)-Q_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)\right]d\tau = v_m(t).
\end{aligned}\right\}\quad (9)$$

Функция ψ, указанная выше, есть составляющая векторного потенциала на ось θ.

Рассмотрим теперь случай, когда $u_r = u_\vartheta = 0$ и возьмем предельные условия в виде:

$$u_\theta\,|_{r=1} = w_m(t)\sin\vartheta P_m(\cos\vartheta).$$

В этом случае введем составляющие векторного потенциала на оси ρ и z цилиндрических координат (ρ, z, θ) и положим $\varphi = \psi_z$ и $\psi = \psi_\rho$. Функция φ должна удовлетворять уравнению (5), где надо подставить b вместо a, и функция ψ должна удовлетворять уравнению (6). Мы имеем для u_θ формулу:

$$u_\theta = \sin\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + \cos\vartheta\,\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}.$$

Возьмем функцию φ в виде (7), где надо только писать b вместо a, и функцию ψ в виде (8). Мы будем иметь для функций $\Phi_m(\tau)$ и $\Psi_m(\tau)$ следующую систему интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
-\int_0^t \Phi_m(\tau)\,\frac{t-\tau+b}{b}\,P_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau\, - \\
-\, m(m+1)\int_0^t \Psi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau = w_m(t), \\
-\int_0^t \Phi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau\, + \\
+\int_0^t \Psi_m(\tau)\left[Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)-\frac{t-\tau+b}{b}\,P_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)\right]d\tau = 0.
\end{aligned}\right\}\quad (10)$$

Применяя обычные методы, можно решить системы (4), (9) и (10) в конечном виде, что мы сделали в явной форме для одного интегрального уравнения в предыдущей заметке.

Можно применить тот же метод для внутренних задач, как это мы уже сделали для одного уравнения ([1]), но в настоящем случае вместо формулы Пуассона мы должны взять известную формулу Стокса.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного
университета.

Поступило
28 XI 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Смирнов, ДАН, I, № 1 (1937),