Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 2

МАТЕМАТИКА

В. ГЛИВЕНКО

ОПЫТ ОБЩЕГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 20 XI 1936)

1. Пусть A есть система множеств X каких угодно элементов x. Предположим, что эта система аналитическая, т. е. каковы бы ни были два множества X_1 и X_2, принадлежащие A, можно найти принадлежащее A множество X, которое содержится одновременно в X_1 и в X_2. Пусть $f(x)$ есть функция, определенная в A и значениями которой являются действительные числа. Предположим, что существует число a такое, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти принадлежащее A множество X, обладающее тем свойством, что для всех его элементов x имеет место неравенство $|a - f(x)| < \varepsilon$. Мы назовем это число a пределом функции $f(x)$ в системе A [ср. ([1])] и обозначим его просто через $f(A)$.

2. Пусть, в частности, A есть аналитическая система множеств X, элементами x которых являются конечные системы действительных чисел,

$$x = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

причем n может быть различно для различных x. Такая система x может содержать и равные между собой числа. Положим:

$$S(x) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Предел $S(A)$, если он существует, мы назовем интегралом чисел, образующих систему A.

3. Пусть, например, E есть измеримое множество (ограниченное или неограниченное) действительных чисел ξ и пусть $\varphi(\xi)$ есть измеримая функция (ограниченная или неограниченная), определенная на E. Рассмотрим всевозможные системы из конечного числа неперекрывающихся замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots, F_n$, содержащихся в E, на каждом из которых функция $\varphi(\xi)$ непрерывна, и пусть M_i и m_i соответственно—максимум и минимум функции $\varphi(\xi)$ на F_i и a_i—число, произвольно выбранное в интервале

$$(m_i \operatorname{mes} F_i, \quad M_i \operatorname{mes} F_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Условимся говорить, что система $x=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ предшествует системе $x'=(a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n'})$, если система x соответствует F'_1, множествам $F_1, F_2, \ldots, F_n$, а система x'—множествам $F'_1, F'_2, \ldots, F'_{n'}$, где

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{n'} \operatorname{mes} F'_i$$

и

$$\max_{i=1,\ldots,n} (M_i - m_i) \geqslant \max_{i=1,\ldots,n'} M'_i - m'_i).$$

Обозначим через $X(x)$ множество всех систем x', которым предшествует x, и через A систему всех множеств $X(x)$. Легко видеть, что система A—аналитическая, предел $S(A)$ существует тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\xi)$ суммируема, и

$$S(A) = \int\limits_{E} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Подобным же образом можно убедиться в том, что данное выше общее определение интеграла охватывает как частные случаи определения, предложенные Radon'om (2), Fréchet (3) и А. Н. Колмогоровым (4).

4. Пусть попрежнему A есть аналитическая система множеств X, элементами x которых являются конечные системы действительных чисел, $x=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Определим преобразование TA системы A, заменяя каждое число a_i числом Ta_i. Условимся говорить, что это преобразование бесконечно малое, если, каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно найти принадлежащее A множество X такое, что для всех его элементов $x=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ имеет место неравенство:

$$|Ta_i - a_i| < \varepsilon |a_i| \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Теорема I. *Если TA есть бесконечно малое преобразование системы A и если существует постоянная M такая, что для всех $x=(a_1, a_2 \ldots, a_n)$*

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| < M,$$

то

$$S(TA) = S(A),$$

причем существование правой части этого равенства влечет за собой существование левой части.

Это—обобщение одного из принципов замены бесконечно малых, на котором покоится большая часть приложений интегрального исчисления к геометрии, механике и физике.

Теорема II. *Если TA, T_1A, T_2A—преобразования системы A такие, что для всех $x=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*

$$Ta_i = T_1 a_i + T_2 a_i \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

то

$$S(TA) = S(T_1A) + S(T_2A),$$

причем существование правой части этого равенства влечет за собой существование левой части.

Это предложение охватывает сразу два основных свойства интегралов, а именно:

$$\int\limits_E [\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)]\, d\xi = \int\limits_E \varphi_1(\xi)\, d\xi + \int\limits_E \varphi_2(\xi)\, d\xi$$

и

$$\int\limits_{E_1+E_2} \varphi(\xi)\, d\xi = \int\limits_{E_1} \varphi(\xi)\, d\xi + \int\limits_{E_2} \varphi(\xi)\, d\xi \qquad E_1 E_2 = 0.$$

5. Возьмем какое-нибудь множество X системы A, рассмотрим всевозможные пары его элементов x', x'' и положим

$$\sigma(X) = \sup |S(x') - S(x'')|.$$

Рассмотрим затем всевозможные множества X, принадлежащие A, и положим

$$\sigma(A) = \inf \sigma(X).$$

Для существования интеграла $S(A)$ необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(A)$ было равно нулю.

Это—обобщение хорошо известного условия Римана для существования интеграла в смысле Римана.

Институт математики
Московского государственного
университета.

Поступило
20 XI 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Крыжановский, Наукови записки науково-дослідчих катедр, Одеси, I (1924). [2] J. Radon, Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, Abt IIa, **122** (1913). [3] M. Fréchet, Bull. de la Soc. Math. de France, **43** (1915). [4] A. Kolmogoroff, Math. Ann., **103** (1930).