Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА, СУММА ГЛАВНЫХ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ КОТОРОГО ЕСТЬ ДАННАЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ УСЛОВИЯМ ЗАМКНУТОСТИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 XI 1936)

На странице 123 книги Боннесена и Фенхеля «Теория выпуклых тел» высказана следующая теорема, доказательство которой приписывается ими Христоффелю [1], а также Гурвицу [2] «Для каждой положительной, удовлетворяющей подходящим условиям дифференцируемости функции $F_1(\xi)$ на единичном шаре, которая удовлетворяет условию

$$\int \xi F_1(\xi)\, d\omega = 0, \tag{1}$$

существует выпуклое тело, для которого F_1 есть сумма главных радиусов кривизны». (Здесь ξ—единичный вектор нормали, и интеграл берется по поверхности единичного шара.)

Однако ни в цитируемой работе Христоффеля, ни у Гурвица такая теорема не доказывается. Так, Гурвиц формулирует свою теорему следующим образом: «Если сумма радиусов кривизны дана для каждого направления внешней нормали, то поверхность вполне определена с точностью до параллельного переноса». Речь идет, следовательно, о теореме единственности, но не о теореме существования, соответствующей выпуклой поверхности. Пусть $H(\theta, \varphi)$—опорная функция поверхности, сферическое отображение которой однозначно покрывает единичный шар, и $R_1 + R_2$—сумма ее главных радиусов кривизны, заданная как функция географических координат θ и φ на сферическом изображении. Как известно, имеет место следующее уравнение:

$$R_1 + R_2 = \Delta H + 2H, \tag{2}$$

где Δ—второй дифференциальный оператор Бельтрами на шаре. При положительной $R_1 + R_2$ решение этого уравнения вовсе не обязано обладать свойствами опорной функции выпуклого тела.

Если b_l есть коэффициент при шаровой функции порядка l в разложении $R_1 + R_2$, а a_l—соответствующий коэффициент в разложении H, то имеет место соотношение:

$$a_l = \frac{-1}{(l-1)(l+2)}\, b_l. \tag{3}$$

Положим $R_1 + R_2 = 4\cos\theta + 1$. Это функция положительная, аналитическая и удовлетворяет условию (1), в чем легко убедиться, зная, что это условие равносильно ортогональности $R_1 + R_2$ к шаровой функции первого порядка.

Полиномы Лежандра $P_0(\cos\theta) = 1$, $P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$. Поэтому

$$R_1 + R_2 = 4\cos^2\theta + 1 = \frac{8}{3}P_2 + \frac{7}{3}P_0. \tag{4}$$

Отсюда на основании (3) получаем:

$$H = -\frac{2}{3}P_2 + \frac{7}{6}P_0 = -\cos^2\theta + \frac{3}{2}; \tag{5}$$

так как $R_1 + R_2$ не зависит от φ, то H есть опорная функция поверхности вращения, т. е. вместе с тем опорная функция ее меридиана. Если $H(\theta)$—опорная функция кривой и R—ее радиус кривизны, то, как известно,

$$R = H + H''. \tag{6}$$

Подставляя в эту формулу функцию (5), получим:

$$R = \cos^2\theta - 2\sin^2\theta + \frac{3}{2}. \tag{7}$$

При $\theta = 0$, $R = \frac{5}{2}$, а при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $R = -\frac{1}{2}$, т. е. радиус кривизны меридиана найденной поверхности меняет знак, что невозможно, если поверхность выпуклая.

Таким образом мы на простом примере убедились в неверности высказанной Боннесеном и Фенхелем теоремы. В связи с этим возникает вопрос: каковы те необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $F_1(\xi)$, для того, чтобы она являлась суммой радиусов кривизны выпуклого тела?

Институт математики и механики
Ленинградского государственного
университета.

Поступило
16 XI 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Christoffel, Uber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben, Ges. Math. Abh., I, 162, oder Journ. f. reine u. angew. Math., **64**, 193—209 (1865). [2] Hurwitz, Ann. de l'Ecole Normale, **3**, 19, 357—408, besonders 401—408; Vgl. auch Blaschke, Differentialgeometrie, I, 95, 3 Auflage (1930). [3] Bonnesen u. Fenchel, Ergebnisse der Math. (1934).