Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИТАН

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА и H. BOHR'a

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 27 III 1937)

Пусть $f(x)\,(-\infty < x < \infty)$ — измеримая и ограниченная функция и пусть

$$E(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-i\alpha x}-L(\alpha x)}{-x^2}\,dx,$$

где

$$L(\alpha x)=\begin{cases} 1-i\alpha x & \text{при} \quad |x|\leq 1,\\ 0 & \text{при} \quad |x|>1\end{cases}$$

ее обобщенное [в смысле H. Hahn'a (1)] преобразование Fourier.

Положим далее:

$$S_n(x;\,N)=\sum_{k=-n}^{n}\frac{n}{N}\left\{E\left(\frac{k+1}{n}N\right)-2E\left(\frac{k}{n}N\right)+E\left(\frac{k-1}{n}N\right)\right\}e^{i\frac{k}{n}Nx}.$$

Лемма I. *Если $E(\alpha)$ есть линейная функция при $\alpha > N > 0$ и $\alpha < -N$, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое n, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-S_n(x;\,N)|^2\frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx<\varepsilon.$$

Доказательство. Полагая

$$T_n(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_n(x;\,N)\frac{e^{-i\alpha x}-L(\alpha x)}{-x^2}\,dx,$$

нетрудно проверить, что кривая $y=\Delta^2 T_n(\alpha)$, где

$$\Delta^2 T_n(\alpha)=\frac{T_n(\alpha+2)-2T_n(\alpha)+T_n(\alpha-2)}{4}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_n(x;\,N)\frac{\sin^2 x}{x^2}e^{-i\alpha x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\left|\frac{kN}{n}-\alpha\right|<2}\frac{n}{N}\left\{E\left(\frac{k+1}{n}N\right)-2E\left(\frac{k}{n}N\right)+E\left(\frac{k-1}{n}N\right)\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\left|\frac{kN}{n}-\alpha\right|\right\}$$

есть ломаная, вписанная в кривую $y=\Delta^2 E(\alpha)$, и совпадает с этой кривой в точках $\alpha=\frac{mN}{n}$, где m — произвольное целое число.

Отсюда в силу условия леммы при достаточно большом n

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta^2 E(\alpha)-\Delta^2 T_n(\alpha)|^2 d\alpha=\int_{-N-2}^{N+2} |\Delta^2 E(\alpha)-\Delta^2 T_n(\alpha)|^2 d\alpha<\frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

В силу уравнения Parseval'я для обычных интегралов Fourier

$$\int_{-N-2}^{N+2} |\Delta^2 E(\alpha)-\Delta^2 T_n(\alpha)|^2 d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-S_n(x;\ N)|^2 \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx,$$

поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-S_n(x;\ N)|^2 \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Лемма II. *Если при условиях леммы I функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на всей вещественной оси, то $S_n(x; N)$ сходится и притом равномерно в каждом конечном интервале к $f(x)$, когда $n\to\infty$.*

Доказательство. Так как $S_n(x;\ N)$ сходится в среднем к $f(x)$, то достаточно показать, что $S_n(x;\ N)$ образует последовательность равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций.

Положим:

$$\sigma_n(x;\ N;\ \mu)=$$
$$=\sum_{k=-\mu n}^{\mu n}\left(1-\left|\frac{k}{n\mu}\right|\right)\left\{\frac{E\left(\frac{k+1}{n}N\right)-2E\left(\frac{k}{n}N\right)+E\left(\frac{k-1}{n}N\right)}{\frac{N}{n}}\right\}e^{ik\frac{N}{n}x}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\frac{\sin^2\frac{N\xi}{2n}}{\frac{N}{2n}\xi^2}\sum_{k=-\mu n}^{\mu n}\left(1-\left|\frac{k}{n\mu}\right|\right)e^{ik\frac{N}{n}(x-\xi)}\,d\xi,$$

где μ — натуральное число.

Следовательно

$$|\sigma_n(x;\ N;\ \mu)|\leqslant\frac{M}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\sum_{k=-n\mu}^{n\mu}\left(1-\left|\frac{k}{n\mu}\right|\right)e^{ik\frac{N}{n}x}e^{-2ik\xi}\,d\xi=M,$$

где

$$M=\sup|f(x)|.$$

Откуда при $\mu\to\infty$ получаем, что

$$|S_n(x;\ N)|\leqslant M.$$

По известной теореме С. Н. Бернштейна:

$$\text{a) } |S_n'(x;\ N)|\leqslant N\cdot M,\qquad \text{b) } |S_n''(x;\ N)|\leqslant N^2\cdot M. \tag{1}$$

Отсюда следует равностепенная непрерывность функций $S_n(x;\ N)$, а также производных $S_n'(x;\ N)$, и лемма доказана.

Так как последовательность функций $S_n'(x; N)$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена, то в силу теоремы Arzelà из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно в каждом конечном интервале. Легко видеть, что предельная функция единственна и равна* $f'(x)$.

Неравенство I. (Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна.)

При условиях леммы II *из*

$$|f(x)| \leqslant M \qquad (-\infty < x < \infty)$$

следует

$$|f'(x)| \leqslant N \cdot M. \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{2}$$

Доказательство. Так как $S_n'(x;\ N)$ стремится к $f'(x)$ равномерно в каждом конечном интервале, то неравенство (2) получается из неравенства (1), а) путем предельного перехода.

Неравенство II. (Обобщение неравенства H. Bohr'а.)

Пусть $f(x)$ — *измеримая ограниченная функция и пусть* $E(\alpha)$ *есть линейная функция при* $|\alpha| < N$. *Тогда из* $|f(x)| \leqslant M$ *следует:*

$$\left|\int f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{M}{N},$$

если постоянную интегрирования выбрать так, что преобразование Fourier-Hahn'а *для* $\int f(x)\,dx$ *есть линейная функция при* $|\alpha| < N$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$f^{(k)}(x) = \frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2u}{k}\right)\frac{\sin^4 u}{u^4}\,du.$$

Известно ([2]), что преобразование Fourier-Hahn'а функции $f^{(k)}(x)$ есть линейная функция при $\alpha > 2k$ и $\alpha < -2k$, а из условия следует, что $E^{(k)}(\alpha)$ есть линейная функция также при $|\alpha| < N$. Далее, $f^{(k)}(x)$ есть непрерывная функция от x при любом k и

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant M.$$

Пусть $S_n^{(k)}(x;\ 2k)$ так же строится для $f^{(k)}(x)$, как $S_n(x;\ N)$ строилось для $f(x)$.

По неравенству H. Bohr'а ([3]):

$$\left|\int S_n^{(k)}(x;\ 2k)\,dx\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{M}{N},$$

где $\int S_n^{(k)}(x;\ 2k)\,dx$ есть неопределенный интеграл без свободного члена.

Полагая

$$\int S_n^{(k)}(x;\ 2k)\,dx = C(n,\ k) + \int_0^x S_n^{(k)}(x;\ 2k)\,dx,$$

найдем, что

$$|C(n,\ k)| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{M}{N}, \qquad \left|\int_0^x S_n^{(k)}(x;\ 2k)\,dx\right| \leqslant \frac{\pi M}{N}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(k)}(x;\ 2k) = f^{(k)}(x),$$

* Тот факт, что при условии леммы II функция $f(x)$ дифференцируема, известен ([2]).

то

$$\left|\int_0^x f^{(k)}(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\pi M}{N}.$$

С другой стороны, можно выделить бесконечную последовательность $\{n_m\}$ так, что

$$\lim_{m\to\infty} C(n_m,\ k) = C(k)$$

существует.

Следовательно

$$\left|C(k) + \int_0^x f^{(k)}(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{M}{N}.$$

Полагая $k \to \infty$ и производя опять соответствующий выбор, получим:

$$\left|C + \int_0^x f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{M}{N}.$$

Легко видеть, что преобразование Fourier-Hahn'a для функции

$$C + \int_0^x f(x)\,dx$$

есть линейная функция в интервале $|\alpha| < N$.

Институт математики и механики.
Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького.

Поступило
27 III 1937

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Hahn, Sitzungsberichte der Akad. Wien, 449—470 (1925). [2] S. Bochner, Fouriersche Integrale, Leipzig (1932). [3] J. Favard, C. R., **202**, 273—276.