Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 4

МАТЕМАТИКА

Академик УАН Г. В. ПФЕЙФФЕР

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИСОЕДИНЕНИЯ К ПОЛНОЙ СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Полную систему нелинейных уравнений возьмем в решенной относительно производных форме:

$$\left.\begin{array}{l} p_1-\Phi_1(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ x_{m+1},\ \ldots,\ x_{m+n},\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_{m+n})=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m-\Phi_m(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ x_{m+1},\ \ldots,\ x_{m+n},\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_{m+n})=0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Присоединив зависимость

$$p_{m+1}-\varphi_2 p_{m+2}-\varphi_3 p_{m+3},-\ \ldots\ -\varphi_n p_{m+n}-\varphi_1=0, \tag{2}$$

потребуем, чтобы система (1), (2) была полной.

Придем к соотношениям

$$\sum_{\rho=2}^{n}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_\nu}p_{m+\rho}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu}-\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_{m+1}}-\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial p_{m+1}}\left(\sum_{\rho=2}^{n}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_{m+1}}p_{m+\rho}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{m+1}}\right)=$$
$$=\sum_{j=2}^{n}\left[\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial p_{m+j}}\left(\sum_{\rho=2}^{n}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_{m+j}}p_{m+\rho}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{m+j}}\right)-\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_{m+j}}\varphi_j\right], \tag{3}$$
$$\nu=1,2,\ \ldots,\ m,$$

$$p_{m+1}=\sum_{\rho=2}^{n}\varphi_\rho p_{m+\rho}+\varphi_1. \tag{4}$$

Необходимо, чтобы равенства (3) после подстановки выражения (4) представляли тождества. Отсюда система линейных уравнений с частными производными первого порядка многих функций

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n. \tag{5}$$

Если последняя обладает решением, то к системе (1) можно присоединить линейное уравнение (2).

Частный случай. Когда система (1)—система линейных однородных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} X_1(z)=p_1+b'_1p_{m+1}+b'_2p_{m+2}+\ldots+b'_np_{m+n}=0, \\ X_m(z)=p_m+b^m_1p_{m+1}+b^m_2p_{m+2}+\ldots+b^m_np_{m+n}=0, \end{array}\right\} \tag{6}$$

то к ней всегда можно присоединить уравнение

$$p_{m+1} - \nu_2 p_{m+2} - \nu_3 p_{m+3} - \ldots - \nu_n p_n = 0 \ (^1). \tag{7}$$

Присоединив к системе (1) зависимости

$$\left.\begin{aligned} p_{m+1} - \xi_3 p_{m+3} - \ldots - \xi_n p_{m+n} - \xi_0 = 0, \\ p_{m+2} - \eta_3 p_{m+3} - \ldots - \eta_n p_{m+n} - \eta_0 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

потребуем, чтобы система (1), (8) была полной.

Придем к соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\rho=3}^{n} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\nu} p_{m+\rho} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_{m+1}} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial p_{m+1}} \Big(\sum_{\rho=3}^{n} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_{m+1}} p_{m+\rho} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x_{m+1}} \Big) - \\ &\qquad - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial p_{m+2}} \Big(\sum_{\rho=3}^{n} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_{m+2}} p_{m+\rho} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x_{m+2}} \Big) - \\ &\qquad - \sum_{j=3}^{n} \Big[\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial p_{m+j}} \Big(\sum_{\rho=3}^{n} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_{m+j}} p_{m+\rho} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x_{m+j}} \Big) - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_{m+j}} \xi_j \Big] = 0, \\ &\sum_{\rho=3}^{n} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial x_\nu} p_{m+\rho} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_{m+2}} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial p_{m+1}} \Big(\sum_{\rho=3}^{n} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial x_{m+1}} p_{m+\rho} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x_{m+1}} \Big) - \\ &\qquad - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial p_{m+2}} \Big(\sum_{\rho=3}^{n} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial x_{m+2}} p_{m+\rho} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x_{m+2}} \Big) - \\ &\qquad - \sum_{j=3}^{n} \Big[\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial p_{m+j}} \Big(\sum_{\rho=3}^{n} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial x_{m+j}} p_{m+\rho} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x_{m+j}} \Big) - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_{m+j}} \eta_j \Big] = 0, \\ &\qquad\qquad \nu = 1, 2, \ldots, m; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\rho=3}^{n} \Big[\Big(\frac{\partial \eta_\rho}{\partial x_{m+1}} - \sum_{j=3}^{n} \xi_j \frac{\partial \eta_\rho}{\partial x_{m+j}} \Big) - \Big(\frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_{m+2}} - \sum_{j=3}^{n} \eta_j \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_{m+j}} \Big) \Big] p_{m+\rho} + \\ &\qquad + \Big[\Big(\frac{\partial \eta_0}{\partial x_{m+1}} - \sum_{j=3}^{n} \xi_j \frac{\partial \eta_0}{\partial x_{m+j}} \Big) - \Big(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_{m+2}} - \sum_{j=3}^{n} \eta_j \frac{\partial \xi_0}{\partial x_{m+j}} \Big) \Big] = 0; \end{aligned} \tag{10}$$

$$p_{m+1} = \sum_{\rho=3}^{n} \xi_\rho p_{m+\rho} + \xi_0, \quad p_{m+2} = \sum_{\rho=3}^{n} \eta_\rho p_{m+\rho} + \eta_0. \tag{11}$$

Необходимо, чтобы равенства (9), (10) после подстановки выражений (11) представляли тождества. Отсюда система линейных уравнений с частными производными первого порядка многих функций

$$\xi_3, \ \xi_4, \ \ldots, \ \xi_n, \ \eta_3, \ \eta_4, \ \ldots, \ \eta_n. \tag{12}$$

Если последняя обладает решением, то к системе (1) можно присоединить линейные уравнения (8).

Частный случай. Когда система (1) — система (6), то к ней всегда можно присоединить уравнения:

$$\left.\begin{aligned} p_{m+1} - \xi_3 p_{m+3} - \ldots - \xi_n p_{m+n} = 0 \ (^2), \\ p_{m+2} - \eta_3 p_{m+3} - \ldots - \eta_n p_{m+n} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

и т. д.

Поступило
26 III 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Pfeiffer, Ann. de Toulouse, Sér. 3, **28**, 211—242 (1936); Г. Пфейффер, Журн. Ин-та матем. АН УССР, № 3, 3—34 (1936). [2] Г. Пфейффер, Журн. Ин-та матем. АН УССР, № 3, 47—78 (1936).