Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 4

МАТЕМАТИКА

В. С. ИГНАТОВСКИЙ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ПО ПОВОДУ ЛАПЛАСОВСКОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ. VII

В предыдущей заметке VI ([1]) мы полагаем:

$$\varphi(x,\ y,\ t)=f(x,\ y)=F(x,\ y)=0. \tag{1}$$

и

$$\mu=\nu=m \tag{2}$$

и получим вместо (1) заметки VI обыкновенное двумерное уравнение волны:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{dt^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{3}$$

Как краевое условие примем:

$$u_0(y,\ t)=\sin\omega t\cdot\psi(y);\ t\geqslant 0, \tag{4}$$

причем $\omega=\frac{2\pi}{T}$ и

$$\psi(y)=\begin{cases}0; & |y|>a,\\ 1; & |y|<a,\end{cases} \tag{5}$$

т. е. мы будем иметь щель шириной в $2a$.

На основании (14) заметки VI решение нашей проблемы будет:

$$u(x,\ y,\ t)=-\frac{c}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\frac{x}{c}}^{t}\sin\omega(t-z)\,dz\int\limits_{-\sqrt{c^2z^2-x^2}}^{\sqrt{c^2z^2-x^2}}\frac{\psi(y-s)\,ds}{\sqrt{c^2z^2-x^2-s^2}};\quad tc>x, \tag{6}$$

и равно нулю при $tc<x$.

Принимая во внимание, что

$$\psi(y)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\sin at\cdot\cos ty\cdot dt}{t}=\begin{cases}0; & |y|>a,\\ 1; & |y|<a,\end{cases} \tag{7}$$

мы получим из (6):

$$u(x,\ y,\ t)=-\frac{2c}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\frac{x}{c}}^{t}\sin\omega(t-z)\,dz\int\limits_0^\infty\frac{\sin as\cdot\cos ys\cdot J_0(s\sqrt{c^2z^2-x^2})\,ds}{s}. \tag{8}$$

Мы введем следующую функцию:

$$A(x,\ y) = \int\limits_{\frac{x}{c}}^{\infty} e^{-i\omega z}\, dz \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin sa \cdot \cos sy}{s} \cdot J_0\ (s\sqrt{c^2z^2 - x^2})\, ds =$$

$$= \frac{1}{c}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin sa \cdot \cos sy}{s\sqrt{s^2 - k^2}} \cdot e^{-x\sqrt{s^2-k^2}}\ ds;\ \ k = \frac{\omega}{c}\,, \tag{9}$$

или

$$A(x,\ y) = -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\pi a}{2k}}\,\Phi_{^1/_2,\,0}(x,\ y) =$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\pi a}{2k}}\left\{\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-xk\sqrt{s^2-1}} \cos sky \cdot J_{^1/_2}(kas)\, ds}{\sqrt{s}\sqrt{s^2 - 1}} - \right.$$

$$\left. - i\int\limits_0^1 \frac{e^{-ikx\sqrt{1-s^2}} \cos sky \cdot J_{^1/_2}(kas)\, ds}{\sqrt{s}\sqrt{1 - s^2}}\right\} \tag{10}$$

Обозначая, как обыкновенно, y в $z = x + iy$ через $Im\ \{z\}$, мы получим поэтому:

$$u(x,\ y,\ t) = \sqrt{\frac{2a}{k\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[Im\left\{e^{i\omega t}\,\Phi_{^1/_2,\,0}\right\}\right] + M(x,\ y,\ t), \tag{11}$$

причем

$$M(x,\ y,\ t) = \frac{2c}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_t^{\infty} \sin\omega(t - z)dz \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin sa \cdot \cos sy}{s} \cdot J_0(s\sqrt{c^2z^2 - x^2})\ ds. \tag{12}$$

Функция $\Phi_{^1/_2,\,0}$ уже раньше (²) (стр. 27 и следующие) мной изучена, и мы имеем:

$$\sqrt{\frac{2a}{k\pi}}\,\frac{\partial\Phi_{^1/_2,\,0}}{\partial x}_{x=0} = \begin{cases} 1; & |y| < a, \\ 0; & |y| > a. \end{cases} \tag{13}$$

Обозначая через r расстояние от начала координат до ауфпункта и $\frac{y}{r} = \sin\vartheta$, получим при больших r или вернее при $\frac{ka^2}{2\pi r} \ll 1$:

$$\Phi_{^1/_2,\,0} = \sqrt{\frac{a}{r}}\ e^{-ikr - \frac{i\pi}{4}}\,\frac{\sin(ka\sin\vartheta)}{ka\sin\vartheta}\,. \tag{14}$$

Наконец $\Phi_{^1/_2,\,0}$ удовлетворяет уравнению:

$$k^2u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{15}$$

Поэтому, принимая во внимание, что при больших значениях t

$$M(x,\ y,\ t) = -\frac{2xa}{\pi\omega c^2 t^3}\,;\ t \to \infty\,, \tag{16}$$

мы можем на основании полученных результатов сделать следующие важные выводы.

Вследствие (16) мы получим из (11)

$$u(x,\ y,\ t) = \sqrt{\frac{2a}{k\pi}}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[Im\left\{e^{i\omega t}\Phi_{^1/_2,0}\right\}\right];\ t = \infty. \tag{17}$$

Таким образом мы от решения (5), удовлетворяющего гиперболическому уравнению (3), перешли к решению (17) эллиптического уравнения (15).

Мы перешли от начального состояния с краевыми условиями к стационарному и — вследствие (13) — с теми же краевыми условиями. Кроме того, как это видно из (14), условие излучающей волны при больших r удовлетворено.

Очевидно, что означенный переход к стационарному состоянию не обусловливается каким-либо затуханием (мы ведь положили $\mu=\nu=m=0$), а как будто тем, что при достаточно больших t, при принятых краевых условиях, волновой круг пробегает такие части пограничной линии, где $u_0(y, t)=0$.

Ясно, что возможность такого перехода лишь тогда будет существовать, если внешнее действие $u_0(y, t)$, при $t>0$, имеет само стационарный характер.

Если в специальном случае $u(x, y, t)$ есть электрическая сила, параллельная оси Z, то мы можем осуществить первое краевое условие в (5), заменяя нашу пограничную плоскость (за исключением щели) абсолютно отражающим экраном. Второе краевое условие не удовлетворяется, так как внутри щели при приближении к краю щели электрическая сила стремится к нулю.

Не останавливаясь на этом подробнее, мы укажем лишь на нашу прежнюю работу ([3]), где также разобрана и применена функция $\Phi_{1/2,0}$.

Институт математики и механики.
Государственный университет.
Ленинград.

Поступило
16 III 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Игнатовский, ДАН, XV, № 2 (1937). [2] V. Ignatovskij, Untersuchungen einiger Integrale mit Besselschen Funktionen und ihre Anwendung auf Beugungserscheinungen und andere, Teil I. Untersuchung der Integrale, Acad. Sci. URSS, Inst. Steklow, III,[1] (1933). [3] W. Ignatovsky, Ann. d. Physik, IV. Folge, **77**, 589 (1925).