Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 3

МАТЕМАТИКА

Р. О. КУЗЬМИН

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 23 III 1937)

Харди и Рамануйан ([1]) доказали, что если обозначить через $\nu(x)$ число тех n в интервале $(1, x)$, для которых $d(n) < (\log n)^{0.7}$, то имеем: $\frac{\nu(x)}{x} \to 1$ при $x \to \infty$. Здесь $d(n)$ — число делителей n. Таким образом основная масса чисел $d(n)$ имеет порядок величины $(\log n)^{0.7}$. С другой стороны, по теореме Гаусса-Дирихле имеем:

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x \log x + O(x).$$

Отсюда следует, что числа $d(n)$ имеют в среднем величину порядка $\log n$. Сопоставление сказанного показывает, что среди чисел $d(n)$ имеются такие, величина которых имеет больший порядок, чем у большинства чисел $d(n)$. Кроме этого, К. К. Марджанишвили ([2]) показал, что справедлива формула:

$$\sum_{n \leqslant x} d^2(n) = x(A_1 \log^3 x + A_2 \log^2 x + A_3 \log x + A_4) + O(x^{\frac{7}{8}} \log x).$$

Она показывает, что влияние исключительно больших по своей величине слагаемых становится еще заметнее в сумме $\sum d^2(n)$, чем в сумме $\sum d(n)$.

С помощью метода, существенно отличного и от метода Харди-Рамануйана и от весьма элементарного по применяемым средствам метода К. К. Марджанишвили, мне удалось получить в указанном направлении результат весьма общего характера. В простейшем случае он может быть выражен следующей теоремой.

Пусть при $\operatorname{Re} s > 1$ функция $f(s)$ определена абсолютно сходящимся произведением:

$$f(s) = \prod_p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{p^{ms}}\right),$$

где p — простые числа, $b_m = O(m^k)$ k — некоторая постоянная, $b_1 = b > 0$ — целое число. В таком случае при $\operatorname{Re} s > 0$ функция $f(s)$ может быть представлена абсолютно сходящимся рядом $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, где для коэффициентов a_n при любом выборе целого положительного числа ν справедлива формула:

$$\sum_{n \leqslant x} a_n^\nu = x \sum_{\mu=1}^{b^\nu} A_\mu \log^{b^\nu - \mu} x + O\left(x^{\frac{b^\nu+3}{b^\nu+6}}\right). \tag{*}$$

Здесь $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ — определенные числа, первое из которых положительное.

Аналогичные формулы получаются и при любом комплексном значении ν, если $\operatorname{Re} \nu > 0$. Оценка остаточного члена в этом случае зависит от верхнего предела абсцисс корней функции Римана $\zeta(s)$. Оценка остаточного члена в (*) может быть несколько понижена. Если верна известная гипотеза Римана, то остаточный член в (*) может быть заменен величиной $O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ при произвольном выборе положительной постоянной ε.

При доказательстве теоремы основное значение имеет то обстоятельство, что функция $f(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2} + \delta$, где $\delta > 0$, может быть представлена в виде произведения $[\zeta(s)]^b$ на функцию $F(s)$, представляемую абсолютно сходящимся рядом Дирихле с ограниченной суммой: $|F(s)| < M = M(\delta)$. Кроме того для величины a_n справедлива оценка: $a_n = O(n^\varepsilon)$. После этого для изучения суммы $\sum a_n$ можно применить метод Ландау, основанный на комплексном интегрировании. Чтобы получить указанную оценку остаточного члена надо принять во внимание равенство: $\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = O(t^\rho)$, где $\rho < \frac{1}{6}$. Изучение суммы $\sum a_n^\nu$ без труда сводится к предыдущему. Сравнивая ряд формул (*), относящихся к одним и тем же числам a_n, но при различных значениях ν, мы получаем возможность сделать некоторые заключения о величине чисел a_n, где n изменяется в интервале $(1, x)$.

Формулу (*) можно обобщить также и на некоторые числовые функции, связанные с распределением простых чисел в арифметических прогрессиях.

В заключение приведем два частных случая формулы (*), представляющихся наиболее простыми и интересными.

1. $b_m = m + 1$; $a_n = d(n)$ — число делителей n:

$$\sum_{n \leqslant x} d^\nu(n) = x(A_1 \log^{2^\nu - 1} x + A_2 \log^{2^\nu - 2} x + \ldots + A_{2^\nu}) + O\left(x^{\frac{2^\nu+3}{2^\nu+6}}\right).$$

В частном случае при $\nu = 2$ получаем: $f(s) = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}$,

$$\sum_{n \leqslant x} d^2(n) = x(A_1 \log^3 x + A_2 \log^2 x + A_3 \log x + A_4) + O\left(x^{\frac{7}{10}}\right).$$

Этот результат был получен К. К. Марджанишвили с несколько худшей оценкой остаточного члена.

2. $b_m = 2$; $a_n = D(n)$ — число не делящихся на квадрат делителей n:

$$\sum_{n \leqslant x} D^{\nu}(n) = x\,(B_1 \log^{2^{\nu}-1} x + B_2 \log^{2^{\nu}-2} x + \ldots + B_{2^{\nu}}) + O\left(x^{\frac{2^{\nu}+3}{2^{\nu}+6}}\right).$$

Эти формулы показывают, что в суммах $\sum d^{\nu}(n)$ и $\sum D^{\nu}(n)$ влияние исключительно больших слагаемых начинает все сильнее сказываться при возрастании числа ν. При более подробном изложении я намерен, исходя из приведенных формул, дать некоторые выводы о распределении чисел $d(n)$ и $D(n)$ по их величине.

Научно-исследовательский институт
математики и механики.
Ленинградский университет.

Поступило
23 III 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Srinivasa Ramanujan, Collected Papers, Cambridge (1927). [2] К. К. Марджанишвили, Изв. Тифлисского ун-та (1929). [3] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Berlin — Leipzig (1909), Bd. II, S. 238.