Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. АХИЕЗЕР и М. КРЕЙН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ УММАМИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 III 1937)

Обозначим через $E_{n-1}(F)$ наилучшее приближение периодической* функции $F(x)$ с помощью тригонометрических сумм порядка $\leqslant n-1$. Пусть далее H_r означает класс всех* периодических r раз дифференцируемых функций:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

удовлетворяющих неравенству

$$|f^{(r)}(x)|\leqslant 1,$$

и пусть, наконец,

$$f^*(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k\cos kx-a_k\sin kx).$$

Предметом настоящей заметки является доказательство соотношений:

$$\sup_{f\subset H_r}E_{n-1}(f)=\frac{4}{\pi n^r}K_r,\qquad K_r=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^{r+1}},\tag{1}$$

$$\sup_{f\subset H_r}E_{n-1}(f^*)=\frac{4}{\pi n^r}K_r^*,\qquad K_r^*=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^{r+1}},\tag{2}$$

* Вообще говоря, комплексной.

уточняющих известные теоремы Jackson'a.

Начнем с того, что функция

$$f_0(x) = \frac{4}{\pi n^r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\overline{2k+1}\, nx - \frac{\pi}{2} r\right)}{(2k+1)^{r+1}}$$

принадлежит H_r, так как

$$f_0^{(r)}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\, nx}{2k+1} = \operatorname{sgn}(\sin nx).$$

А так как $f_0(x)$ принимает с чередующимися знаками значение $\pm \frac{4}{\pi n^r} K_r$ в точках

$$x_\lambda = \frac{\varepsilon\pi}{2n} + \frac{\lambda\pi}{n} \qquad (\lambda = 0,\ 1,\ \dots,\ 2n-1),$$

где $\varepsilon = 0$ при нечетном r и $\varepsilon = 1$ при четном r, и кроме того, как нетрудно видеть,

$$\frac{4}{\pi n^r} K_r = \max |f_0(x)|,$$

то в силу теоремы П. Чебышева

$$E_{n-1}(f_0) = \frac{4}{\pi n^r} K_r.$$

Подобным образом, полагая

$$f_0^*(x) = \frac{4}{\pi n^r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\overline{2k+1}\, nx - \frac{\pi}{2} r\right)}{(2k+1)^{r+1}},$$

найдем, что

$$E_{n-1}(f_0^*) = \frac{4}{\pi n^r} K_r^*.$$

Нам остается доказать, что для любой функции $f(x) \subset H_r$

$$E_{n-1}(f) \leqslant \frac{4}{\pi n^r} K_r, \qquad E_{n-1}(f^*) \leqslant \frac{4}{\pi n^r} K_r^*.$$

С этой целью заметим, что

$$f(x) - a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t)\, f^{(r)}(x+t)\, dt,$$

$$f^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_r(t)\, f^{(r)}(x+t)\, dt,$$

где

$$\varphi_r(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(mt+\frac{\pi}{2}r\right)}{m^r}, \quad \psi(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\left(mt+\frac{\pi}{2}r\right)}{m^r}.$$

Следовательно,

$$\left|f(x)-a_0-\sum_{k=1}^{n-1}k^r\xi_k(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\varphi_r(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\cos\left(kt+\frac{\pi}{2}r\right)\right\}f^{(r)}(x+t)\,dt\right|$$

и

$$\left|f^*(x)-\sum_{k=1}^{n-1}k^r\eta_k(b_k\cos kx-a_k\sin kx)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\psi_r(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k\sin\left(kt+\frac{\pi}{2}r\right)\right\}f^{(r)}(x+t)\,dt\right|;$$

отсюда

$$E_{n-1}(f)\leqslant\min\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\varphi_r(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\cos\left(kt+\frac{\pi}{2}r\right)\right|dt, \tag{3}$$

$$E_{n-1}(f^*)\leqslant\min\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\psi_r(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k\sin\left(kt+\frac{\pi}{2}r\right)\right|dt. \tag{4}$$

Как недавно доказал J. Favard([1]), правая часть (3) равна $\frac{4}{\pi n^r}K_r$, и этот минимум достигается, если определить числа $\xi_k=\xi_k^*$ так, чтобы выражение

$$\varphi_r(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\cos\left(kt+\frac{\pi}{2}r\right)$$

обращалось в нуль в корнях функции

$$\cos\left(nt+\frac{\pi}{2}r\right);$$

таким образом соотношение (1) доказано.

Для доказательства соотношения (2) покажем предварительно, что, каковы бы ни были числа η_k (мы можем и будем их считать вещественными), разность

$$\psi_r(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k\sin\left(kt+\frac{\pi}{2}r\right) \tag{5}$$

имеет не более $2n-\varepsilon$ нулей в интервале $0<t<2\pi$.

Действительно,

$$\psi_1(t) = -\log\left(2\sin\frac{t}{2}\right) \quad (0 < t < 2\pi);$$

если поэтому выражение (5) имеет при $r=1$ $2n+1$ нулей в интервале $0 < t < 2\pi$, то разность

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} k\eta_k \sin kt,$$

а значит, и тригонометрический полином

$$\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} k\eta_k \sin kt \sin\frac{t}{2}$$

имеет по крайней мере $2n$ нулей в интервале $0 < t < 2\pi$, что абсурдно. Итак, при $r=1$ наше утверждение доказано. Для $r > 1$ оно получается применением теорем Roll'я, поскольку

$$\frac{d}{dt}\psi_r(t) = -\psi_{r-1}(t).$$

Если мы поэтому определим числа $\eta_k = \eta_k^0$ так, чтобы выражение (5) обращалось в нуль в корнях функции

$$\sin\left(nt + \frac{\pi}{2}r\right),$$

то эти корни будут единственными корнями и притом узлами функции (5). При этом выборе коэффициентов η_k^0

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\psi_r(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\eta_k^0 \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}r\right)\right| dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\psi_r(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\eta_k^0 \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}r\right)\right\}\operatorname{sgn}\left\{\sin\left(nt + \frac{\pi}{2}r\right)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_r(t)\operatorname{sgn}\left\{\sin\left(nt + \frac{\pi}{2}r\right)\right\} dt = \frac{4}{\pi n^r} K_r^*,$$

в то время как при любых других η_k

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\psi_r(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\eta_k \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}r\right)\right| dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\psi_r(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\eta_k \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}r\right)\right\}\operatorname{sgn}\left\{\sin\left(nt + \frac{\pi}{2}r\right)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_r(t)\operatorname{sgn}\left\{\sin\left(nt + \frac{\pi}{2}r\right)\right\} dt = \frac{4}{\pi n^r} K_r^*.$$

Таким образом наше утверждение полностью доказано.

Заметим, что найденный нами результат приводит к неравенствам:

$$\left| f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} k^r \xi_k^0 (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leqslant \frac{4}{\pi n^r} K_r, \qquad 6$$

$$(f \subset H_r)$$

$$\left| f^*(x) - \sum_{k=1}^{n-1} k^r \eta_k^0 (b_k \cos kx - a_k \sin kx) \right| \leqslant \frac{4}{\pi n^r} K_r^*, \qquad (7)$$

которые, как мы видели, улучшить нельзя.

Неравенство (6) является обобщением теоремы J. Favard'a ([1]) $(a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0)$, отправляясь от которой, мы пришли к нашим результатам.

Неравенство (7) позволяет дополнить теорему J. Favard'a следующим предложением:

Если

$$f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

есть функция класса H_r, т. е. $|f^{(r)}(x)| \leqslant 1$, то

$$|f^*(x)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx) \right| \leqslant \frac{4}{\pi n^r} K_r^*,$$

причем это неравенство улучшить нельзя.

В заключение приведем значения чисел $\xi_k^{(0)}$, вычисление которых не представляет труда:

$$k^r \xi_k^0 = -\frac{1}{(r-1)!} z^r \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right) \Bigg|_{z=\frac{k}{2n}} = D_r \left(\frac{k}{2n} \right),$$

если r—число четное, и

$$k^r \xi_k^0 = \frac{1}{(r-1)!} z^r \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} (\pi \operatorname{ctg} \pi z) \Bigg|_{z=\frac{k}{2n}} = D_r \left(\frac{k}{2n} \right),$$

если r—число нечетное.

Таким образом, вводя обобщенные суммы

$$S_{n-1}(f; r) = \sum_{k=0}^{n-1} D_r \left(\frac{k}{2n} \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

мы получаем некоторый способ суммирования рядов Fourier, обладающий тем свойством, что для

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - S_{n-1}(f; r)| \leqslant \sup_{g \subset H_r} E_{n-1}(g) = \frac{4}{\pi n^r} K_r,$$

т. е. способ суммирования, дающий наилучшую оценку в теореме аппроксимации D. Jackson'a, если $f(x)$ пробегает класс H_r.

Научно-исследовательский институт
математики и механики.
Харьковский государственный университет
им. М. Горького.

Поступило
11 III 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Favard, Matematisk Tidsskrift, 81—94 (1936).