Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. И. СМИРНОВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

РЕШЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ КРУГА И СФЕРЫ

Рассмотрим сначала волновое уравнение в плоском случае

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Легко показать, что если $\varphi[t, M(x, y)]$ есть решение уравнения (1), однородное, нулевой степени относительно переменных (t, x, y), которое обращается в нуль на окружности $ar = t$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то выражение

$$\int^{t-ar} \omega(\tau)\, \varphi(t-\tau, M)\, d\tau, \tag{2}$$

где $\omega(\tau)$—произвольная непрерывная функция, есть также решение уравнения (1). Мы можем написать решения уравнения (1), удовлетворяющие указанным выше свойствам. Эти решения имеют вид:

$$\left[\left(\frac{t}{ar} + \sqrt{\frac{t^2}{a^2 r^2} - 1}\right)^m - \left(\frac{t}{ar} - \sqrt{\frac{t^2}{a^2 r^2} - 1}\right)^m\right] \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}$$
$$(m = 1, 2, \ldots; \quad t \geqslant ar),$$

что может быть написано с точностью до постоянного множителя в виде:

$$\sqrt{\frac{t^2}{a^2 r^2} - 1}\, U_{m-1}\left(\frac{t}{ar}\right) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \qquad (m = 1, 2, \ldots; \quad t \geqslant ar), \tag{3}$$

где

$$U_m(x) = \frac{1}{(m+1)^2} T'_{m+1}(x), \qquad T_m(x) = \cos(m \arccos x)$$

и (r, φ)—полярные координаты точки M. В случае $m = 0$ вместо (3) мы имеем решение Volterra:

$$\log\left(\frac{t}{ar} + \sqrt{\frac{t^2}{a^2 r^2} - 1}\right). \tag{4}$$

Поставим задачу: найти решение уравнения (1) в области $r > 1$, если

$$\varphi_m(t, M)\Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_m(t, M)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{5}$$

и условие на окружности $r=1$ имеет вид:

$$\varphi_m(t, M)\,|_{r=1} = f_m(t) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}. \tag{6}$$

Для дальнейшего достаточно предположить, что заданная функция $f_m(t)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка и что имеют место условия: $f_m(0) = f'_m(0) = 0$. Мы будем искать это решение в виде:

$$\varphi_m(t, M) = \int\limits_0^{t-ar+a} \omega_m(\tau) \sqrt{\frac{(t-\tau+a)^2}{a^2r^2} - 1}\, U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+a}{ar}\right) d\tau \times \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}. \tag{7}$$

Мы не можем дифференцировать два раза под знаком интеграла, но, интегрируя по частям, легко показать, что формула (7) дает нам решение уравнения (1). Это решение удовлетворяет условиям (5) и имеет на фронте волны прерывность не выше второго порядка. Условие (6) дает нам интегральное уравнение для $\omega_m(\tau)$:

$$\int\limits_0^t \omega_m(\tau) \sqrt{\frac{(t-\tau+a)^2}{a^2} - 1}\, U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right) d\tau = f_m(t) \qquad (t \geqslant 0),$$

или, дифференцируя по t, мы будем иметь эквивалентное уравнение:

$$\int\limits_0^t \omega_m(\tau) \frac{T_m\left(\dfrac{t-\tau+a}{a}\right)}{\sqrt{(t-\tau+a)^2 - a^2}}\, d\tau = f'_m(t) \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{8}$$

Для волнового уравнения с четырьмя независимыми переменными

$$a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

решения, удовлетворяющие указанным выше условиям, имеют вид:

$$Q_{n+1}\left(\frac{t}{ar}\right) P_n^{(m)}(\cos\vartheta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}, \qquad (n = 0,\ 1, \ldots;\quad m = 0,\ 1, \ldots,\ n), \tag{9}$$

где $P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\cos m\varphi$ и $P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\sin m\varphi$ суть сферические функции, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$$Q_{n+1}(x) = \int\limits_1^x P_n(x)\, dx$$

и $P_n(x)$—полиномы Лежандра. В этом случае для предельных условий вида:

$$\varphi(t, M)\,|_{r=1} = f_{m,n}(t)\, P_n^{(m)}(\cos\vartheta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \tag{10}$$

надо положить:

$$\varphi(t, M) = \int\limits_{0}^{t-ar+a} \omega_{m,n}(\tau)\, Q_{n+1}\left(\frac{t-\tau+a}{ar}\right) d\tau \times P_n^{(m)}(\cos\vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}, \tag{11}$$

и для функции $\omega_{m,n}(\tau)$ мы будем иметь интегральное уравнение:

$$\int_0^t \omega_{m,n}(\tau) P_n\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right) d\tau = a f_{m,n}(t) \qquad (t \geqslant 0). \tag{12}$$

Уравнение (8) принадлежит к типу уравнений, рассмотренных еще в 1884 г. Сониным [1]. Уравнение (12) в предположении, что существует непрерывная производная $f''_{m,n}(t)$, преобразуется в интегральное уравнение Volterra второго вида с ядром, зависящим от разности аргументов [2].

Мы можем очевидно предположить $a=1$ и, применяя обычные методы, мы будем иметь решение уравнения (8) в виде:

$$\omega_m(\tau) = \int_0^\tau H_m(\tau - x) f''_m(x)\, dx, \tag{13}$$

где ядро $H_m(z)\,(z>0)$ выражается формулой:

$$H_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sz}\, \frac{e^{-s}}{sR_m(s)}\, ds. \tag{14}$$

В этой формуле c есть достаточно большое положительное число, и, чтобы получить функцию $R_m(s)$, надо в полином $T_m(t)$ подставить $(-1)^p K_0^{(p)}(s)$ вместо t^p, где $K_0(s)$ есть известная из теории функций Бесселя функция Macdonald'а. Легко показать, что при $z \to +0$ функция $H_m(z)$ стремится к бесконечности порядка $\frac{1}{\sqrt{z}}$.

Решение уравнения (12) выражается формулой

$$\omega_{m,n}(\tau) = f''_{m,n}(\tau) - \int_0^\tau H_{m,n}(\tau - x) f''_{m,n}(x)\, dx, \tag{15}$$

где $H_{m,n}(z)$ равна сумме вычетов функции:

$$X(s) = \frac{-s^n}{s^n + s^{n-1}P'_n(1) + s^{n-2}P''_n(1) + \ldots + P_n^{(n)}(1)}\, e^{sz}$$

по отношению к нулям знаменателя.

Сингулярные решения (3) и (8) могут быть получены естественным образом путем применения общей теории, данной С. Л. Соболевым и автором [3].

Заметим наконец, что можно применить сингулярные решения, указанные выше, к решению задачи для внутренней части сферы и круга. Рассмотрим например случай сферы и условия (9) на поверхности этой сферы. Надо взять решение в виде:

$$\varphi = \int_0^{r+t-1} \omega_{m,n}(\tau)\, Q_{n+1}\left(\frac{1+\tau-t}{r}\right) d\tau \times P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\cos m\varphi, \tag{16}$$

где мы положили $a = 1$. Функция $\omega_{m,n}(\tau)$ может быть определена, как и выше. Решение (16) имеет место при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Затем надо применить формулу Пуассона, чтобы привести к нулю начальные данные. Эта формула Пуассона дает нам решение при $1 \leqslant t \leqslant 2$. Для интервала $2 \leqslant t \leqslant 3$ надо применить решение вида (16), изменяя предельные условия при помощи формулы Пуассона.

Институт математики и механики Ленинградского государственного университета.

Поступило
11 XI 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Sonine, Acta Mathem., 4, 171 (1884). [2] V. Volterra, Leçons sur les équat. intégr., Paris, p. 52—56 (1913). [3] В. Смирнов и С. Соболев, Труды Сейсмол. инст. Акад. Наук СССР, № 29, 1—5 (1933).