Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. А. РАЙКОВ

О РАЗЛОЖЕНИИ ЗАКОНОВ ПУАССОНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 24 XI 1936)

Законами Пуассона называются функции распределения

$$F\left(\frac{x-\alpha}{\sigma};\ \lambda\right),\ \alpha \gtreqless 0,\ \sigma > 0,\ \lambda \geqslant 0,$$

где

$$F(x;\ \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!}$$

[при $x < 0$ сумма пуста и $F(x; \lambda) = 0$]. Случаю $\lambda = 0$ соответствует «единичный» закон

$$F\left(\frac{x-\alpha}{\sigma};\ 0\right) = F(x-\alpha;\ 0) = \varepsilon(x-\alpha) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < \alpha, \\ 1 \text{ при } x \geqslant \alpha. \end{cases}$$

В настоящей заметке устанавливается следующее предложение: *если случайная величина, распределенная по закону Пуассона, является суммой двух независимых случайных величин, то каждая из них также распределена по закону Пуассона.* В более точной формулировке: *если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения, удовлетворяющие соотношению*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) = F\left(\frac{x-\alpha}{\sigma};\ \lambda\right), \tag{1}$$

то

$$F_1(x) = F\left(\frac{x-\alpha-\beta}{\sigma};\ \mu\right),\ F_2(x) = F\left(\frac{x-\alpha+\beta}{\sigma};\ \nu\right),$$

где

$$\mu \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0,\ \mu + \nu = \lambda$$

и β — произвольное вещественное число.

Аналогичное предложение для нормальных законов распределения было недавно доказано H. Cramér'ом (1).

Случай $\lambda = 0$ тривиален, и мы его отбросим. Далее очевидно можно ограничиться рассмотрением уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) = F(x; \lambda), \tag{2}$$

получающегося из (1) при $\alpha = 0$, $\sigma = 1$. Это и практически наиболее интересный случай.

Из того, что $F(x; \lambda)$ растет лишь в точках $k = 0, 1, 2, \ldots$, легко получается, что $F_1(x)$ может расти лишь в точках $\beta + k$, а $F_2(x)$ лишь в точках $-\beta + k$, где β есть некоторое произвольное вещественное число—первая точка роста $F_1(x)$; $-\beta$ будет первой точкой роста $F_2(x)$. Без нарушения общности можно положить $\beta = 0$. Имеем

$$F_1(x) = \sum_{k \leqslant x} a_k, \quad a_0 > 0, \quad a_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1,$$

точно так же

$$F_2(x) = \sum_{k \leqslant x} b_k, \quad b_0 > 0, \quad b_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = 1.$$

Характеристические функции законов распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F(x; \lambda)$ суть

$$f_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ikt}, \quad f_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ikt} \quad \text{и} \quad f(t; \lambda) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Докажем, что $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — целые функции комплексного переменного t. Проведем доказательство для $f_1(t)$; для $f_2(t)$ оно совершенно аналогично. Достаточно доказать сходимость ряда

$$f_1(iv) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-kv}$$

для любого вещественного v. Для $v \geqslant 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-kv} \leqslant 1.$$

Пусть $v < 0$. Из соотношения

$$f_1(t) f_2(t) = f(t; \lambda) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

получаем

$$a_k b_0 + \ldots + a_0 b_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

откуда

$$a_k \leqslant \frac{1}{b_0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{k|v|} \leqslant \frac{1}{b_0} e^{\lambda(e^{|v|}-1)} < e^{Ce^{|v|}}.$$

Так как $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — целые функции и их произведение $e^{\lambda(e^{it}-1)}$ не имеет нулей, то $f_1(t)$ и $f_2(t)$ также не имеют нулей. Поэтому $f_1(t) = e^{g_1(t)}$, где $g_1(t)$ — целая функция, причем можно считать $g_1(0) = 0$, ибо $f_1(0) = 1$. Но $f_1(t)$ имеет период 2π; отсюда $g_1(t) = ait + h_1(t)$, где a — некоторое целое число и $h_1(t)$ — целая периодическая функция с периодом 2π.

Пусть

$$A(v) = \max_u \Re\, h_1(u + iv).$$

Так как

$$|f_1(u + iv)| = e^{-av + \Re h_1(u+iv)},$$

то из неравенств

$$|f_1(u + iv)| \leqslant f_1(iv) \leqslant \begin{cases} 1 & \text{при } v \geqslant 0, \\ e^{Ce^{|v|}} & \text{при } v < 0 \end{cases}$$

получаются следующие неравенства для $A(v)$:

$$A(v) \leqslant \begin{cases} av & \text{при } v \geqslant 0, \\ Ce^{|v|} + av & \text{при } v < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Но, как нетрудно видеть, $h_1(t)$ раскладывается в «ряд Фурье»

$$h_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int},$$

абсолютно сходящийся во всей плоскости t. Из соотношения $\overline{f_1(t)} = f_1(-t)$, справедливого для вещественных t, вытекает, что все α_n вещественны. Теперь можно показать, что для всех $v \gtrless 0$ имеет место неравенство

$$|\alpha_{-n} e^{nv} + \alpha_n e^{-nv}| \leqslant \max\{4A(v),\ 0\} - 2\alpha_0$$

(доказательство проводится тем же способом, что и для аналогичного неравенства в теории степенных рядов). Отсюда, беря $v \to +\infty$, с помощью первого неравенства (3) получаем, что $\alpha_{-n} = 0$ для всех $n > 0$; беря $v \to -\infty$, с помощью второго неравенства (3) получаем, что $\alpha_n = 0$ для всех $n > 1$. Итак, имеем

$$f_1(t) = e^{ait + \alpha_0 + \alpha_1 e^{it}}.$$

Так как $f_1(0) = 1$, то $\alpha_1 = -\alpha_0 = \mu$. Но для вещественных t $|f_1(t)| \leqslant 1$; отсюда $\mu \geqslant 0$. Наконец $a = 0$, ибо ряд Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

для $f_1(t)$ начинается со свободного члена. Таким образом

$$f_1(t) = e^{\mu(e^{it}-1)}, \quad \mu \geqslant 0.$$

Аналогично

$$f_2(t) = e^{\nu(e^{it}-1)}, \quad \nu \geqslant 0;$$

при этом $\mu + \nu = \lambda$. Отсюда

$$F_1(x) = F(x; \mu), \quad F_2(x) = F(x; \nu).$$

Общее решение уравнения (2) будет

$$F_1(x) = F(x - \beta; \mu), \quad F_2(x) = F(x + \beta; \nu).$$

Научно-исследовательский институт математики
Московского государственного университета.

Поступило
24 XI 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Cramér, Math. ZS., 41, вып. 3, 405—414.