Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. ПИСКУНОВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 II 1937)

В данной работе мы рассматриваем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}=\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

Для него имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Задача Коши для уравнения (1), если данные Коши, заданные при $t=0$, не аналитические, или не имеет решения или оно не единственно.*

С помощью линейного преобразования координат уравнение (1) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1'}$$

Для этого уравнения установлена следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть на плоскостях $x=0$ при $0\leqslant y\leqslant b$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ и $y=0$ при $0\leqslant x\leqslant a$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ заданы функции $\varphi_2(y,t)$ и $\varphi_1(x,t)$, имеющие в указанных областях непрерывные производные по y и по x и являющиеся функциями 2-го класса по t. Кроме того $\varphi_1(0,t)=\varphi_2(0,t)$. Тогда существует решение уравнения (1′), удовлетворяющее условию:*

$$\left.\begin{aligned} U(0,y,t)&=\varphi_2(y,t)\\ U(x,0,t)&=\varphi_1(x,t)\end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Так же установлено, что полученное решение есть функция 2-го класса по t и что это единственная функция 2-го класса, т. е. что не существует другой функции 2-го класса, удовлетворяющей уравнению (1′) и краевым условиям (2).

Справедливо также утверждение, что если имеем решение, которое есть функция 2-го класса по t, то обязательно начальные функции будут функциями 2-го класса по t.

Далее устанавливается теорема единственности для решений уравнения (1′).

Теорема 3. *Решение уравнения (1′), принимающее при $x=0$ и $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ t_0\leqslant t\leqslant t_1)$ заданные значения $\varphi_2(y,t)$ и $\varphi_1(x,t)$, единственно.*

Доказательство основано на следующем.

Пусть при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$ имеем решение $U(x, y, t)$, которое отлично от нуля. Осредняем его следующим образом:

$$\overline{U}(x, y, t) = \frac{1}{I_\rho} \underbrace{\iiint U(\xi, \eta, \tau)\, e^{\frac{r^2}{r^2-\rho^2}}\, dv}_{r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\tau)^2 \leqslant \rho^2} \, *, \tag{3}$$

где положено

$$I_\rho = \underbrace{\iiint}_{r^2 \leqslant \rho^2} e^{\frac{r^2}{r^2-\rho^2}}\, dv, \qquad \rho = \text{const}.$$

Полученная функция $\overline{U}\ (x, y, t)$ определена в области $x \leqslant a - \rho$, $y \leqslant b - \rho$; $t_0 + \rho \leqslant t \leqslant t_1 - \rho$ и удовлетворяет в этой области уравнению (1′).

Согласно построению $\overline{U}(x, y, t) = 0$ при $x \leqslant -\rho$, $y < b$; $y \leqslant -\rho$, $x < a$.

Доказано, что $U(x, y, t)$ есть функция 2-го класса по всем аргументам (для этого доказана вспомогательная теорема, что функция 2-го класса от аналитической есть функция 2-го класса). На основании теоремы (2) следует, что $\overline{U}(x, y, t)$—тождественный нуль; так как в формуле (3) ρ произвольно, то отсюда следует, что $U(x, y, t)$ есть тождественный нуль.

Теорема 4. *При произвольных заданных функциях $\varphi_1(x, t)$ и $\varphi_2(y, t)$ k раз дифференцируемых по t (k—любое конечное число) уравнение (1′) может не иметь решения.*

Доказательство этой теоремы основано на следующем.

Пусть существует решение $U_1(x, y, t)$, определенное по краевым функциям $\varphi_1(x, t)$ и $\varphi_2(y, t)$, имеющим по t k производных в областях

$$0 \leqslant y \leqslant b,\ T_1 \leqslant t \leqslant T_2 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant x \leqslant a,\ T_1 \leqslant t \leqslant T_2.$$

Решение определено в области A:

$$0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ T_1 \leqslant t \leqslant T_2.$$

Наряду с этим рассматриваем решение $U_2(x, y, t)$, определенное по следующим краевым условиям:

$$f_1(x, t) = \begin{cases} \varphi_1(x, t) \ \text{при}\ t_1 \leqslant t \leqslant T_2 & \text{(область } A'), \\ \psi_1(x, t) \ \text{при}\ T_1 \leqslant t \leqslant t_1 & \text{(область } A''), \end{cases}$$

где $\psi_1(x, t)$—функция 2-го класса по t, удовлетворяющая при $t = t_1$ соотношению:

$$\varphi_{1t}^{(i)}(x, t_1) = \psi_{1t}^{(i)}(x, t_1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Аналогичным образом определяем функцию $= f_2(y, t)$.

Рассматривая решение $U_2(x, y, t)$ при $t = t_1$ как решение в области A' и в области A'', убеждаемся, что оно удовлетворяет соотношению:

$$\left| \frac{\partial^{2p} U_2}{\partial x^p\, \partial y^p} \right| \leqslant \frac{M\,(2p)\,!}{\rho_1^p} f;$$

отсюда следует, что первоначальное $U_1(x, y, t)$ решение есть функция 2-го класса по t; это и доказывает формулированную теорему.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
27 II 1937.

---

* Такое осреднение решений волнового уравнения применялось проф. С. А. Соболевым в его работе «Дифракция волн на римановых поверхностях».