Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 1

МАТЕМАТИКА

В. Г. ЧЕЛИДЗЕ

О ПРОИЗВОДНЫХ ЧИСЛАХ ФУНКЦИИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 20 II 1937)

Цель этой работы заключается в распространении некоторых результатов, полученных для функции от одной переменной, на функции от двух переменных. Исходными точками для этой работы послужили исследования A. Denjoy(1), Н. Н. Лузина (2), S. Saks'a (3), А. Я. Хинчина (4).

Вводя понятие функции от двух переменных с ограниченным изменением на интервале I_0 и вообще на любом множестве E и понятие производной в смысле (k), мы показываем, что такая функция почти всюду допускает производную в смысле (k) на данном множестве.

Следуя идеям А. Я. Хинчина, мы определяем функции от двух переменных с обобщенным ограниченным изменением следующим образом:

Пусть функция $F(x, y)$ определена на двухмерном интервале $I_0 = [a_1, a_2; b_1, b_2]$; мы скажем, что $F(x, y)$ есть функция с обобщенным ограниченным изменением на интервале I_0, если I_0 можно представить как сумму счетного числа множеств $\{E_n\}$ таких, на каждом из которых $F(x, y)$ есть функция с ограниченным изменением.

Аналогично определяем обобщенную абсолютно непрерывную функцию от двух переменных.

§ 1. Пусть дана функция $F(x, y)$, определенная в интервале $I_0 = [a_1, a_2; b_1, b_2]$. В этом интервале рассмотрим интервал

$$I = [x_1, x_2; y_1, y_2] \subset I_0.$$

Рассмотрим выражение

$$F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2).$$

Такое выражение в дальнейшем будем обозначать через

$$\Delta(F; x_1, x_2, y_1, y_2) \text{ или через } \Phi_F(I).$$

Очевидно, что $\Phi_F(I)$ является функцией интервала I.

Определение I. Разделим теперь интервал I_0 на любое конечное число интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_m$ и рассмотрим сумму:

$$\sum_k |\Phi_F(I_k)|.$$

Если верхняя грань этой суммы является конечным числом, тогда функцию $F(x, y)$ будем называть функцией с ограниченным изменением на интервале I_0.

Определение II. Функция $F(x, y)$, определенная в интервале I_0, называется абсолютно непрерывной на I_0, если для всякого данного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что для всякой конечной последовательности интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_m$, не имеющих попарно общих внутренних точек, неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(I_k) < \eta \text{ влечет } \sum_{k=1}^{m} |\Phi_F(I_k)| < \varepsilon,$$

где $\mu(I_k)$—мера интервала I_k.

Определение III. Пусть теперь функция $F(x, y)$ определена на ограниченном множестве E. Возьмем интервал $I_0 = [a_1, a_2; b_1, b_2]$, где a_1 и a_2—нижняя и верхняя грани абсцисс точек множества E, а b_1 и b_2—нижняя и верхняя грани ординат точек того же множества E.

Мы скажем, что $F(x, y)$ есть функция с ограниченным изменением на множестве E, если существует такая функция $\Psi(x, y)$, которая определена на интервале I_0, является на нем функцией с ограниченным изменением и совпадает на множестве E с данной функцией $F(x, y)$.

Определение IV. Функцию $F(x, y)$ будем называть абсолютно непрерывной на множестве E, если существует такая функция $H(x, y)$, которая определена на интервале $I_0 \supset E$, является на нем абсолютно непрерывной функцией и совпадает на множестве E с данной функцией $F(x, y)$.

Определение V. Функцию $F(x, y)$, определенную на множестве E, будем называть функцией с обобщенным ограниченным изменением на E, если E есть сумма конечного или счетного числа множеств E_n таких, на каждом из которых $F(x, y)$ есть функция с ограниченным изменением.

Обобщенная абсолютно непрерывная функция определяется аналогично.

Определение VI. Пусть функция $F(x, y)$ определена на множестве E. Производной в смысле (k) от функции $F(x, y)$ в точке $(x_0, y_0) \subset E$ мы называем предел

$$\lim \frac{\Delta(F; x_0, x, y_0, y)}{(x - x_0)(y - y_0)},$$

если точка (x, y) стремится к точке (x_0, y_0), пробегая точки множества E таким образом, что точки (x, y_0) и (x_0, y) принадлежат также множеству E и выполняется условие

$$\frac{1}{k} \leqslant \left| \frac{y - y_0}{x - x_0} \right| \leqslant k.$$

Этот предел обозначаем через $D_E^{(k)} F(x_0, y_0)$ и будем называть производной в смысле (k) по отношению множества E от функции $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Определение VII. Апроксимативной производной от функции $F(x, y)$ в точке $(x_0, y_0) \subset E$ мы называем предел

$$\lim \frac{\Delta(F; x_0, x, y_0, y)}{(x - x_0)(y - y_0)},$$

если точка (x, y) стремится к точке (x_0, y_0), пробегая точки некоторого множества $E' \subset E$, для которого точка (x_0, y_0) есть точка плотности.

Апроксимативную производную от функции $F(x, y)$ будем обозначать через $D_{ap} F(x_0, y_0)$.

§ 2. Мы доказываем следующие основные теоремы:

Теорема 1. *Если непрерывная функция $F(x, y)$ допускает в точке (x_0, y_0) производную в смысле (k) при любом значении k, то $F(x, y)$ имеет в этой точке также и апроксимативную производную.*

Теорема 2. *Если $F(x, y)$ есть функция с обобщенным ограниченным изменением на двумерном интервале $I_0 = [a_1, a_2; b_1, b_2]$, то почти всюду существует конечная апроксимативная производная.*

Теорема 3. *Если непрерывная функция $F(x, y)$, определенная на интервале I_0, допускает всюду за исключением счетного множества точек конечную апроксимативную производную, то $F(x, y)$ есть обобщенная абсолютно непрерывная функция.*

Теорема 4. *Если $F(x, y)$ есть обобщенная абсолютно непрерывная функция на интервале I_0 и почти всюду $D_{ap} F(x, y) = 0$,* то $F(x, y)$ будет вида $\varphi(x) + \psi(y)$.

Эта работа, начатая осенью 1935 г., протекала под руководством проф. Д. Е. Меньшова, который кроме проверки уже полученных результатов давал направление для получения новых, что было для меня особенно ценно благодаря широкой осведомленности Д. Е. Меньшова в этих и соседних вопросах. За все это приношу ему свою благодарность.

Тбилиси.

Поступило
23 II 1937

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Denjoy, Bull. Soc. Math. de Fr., **43**, 161—248 (1915); Journ. de Math., 105—240 (1915); Ann. Ec. Norm. sup., 127—222 (1916), 181—236 (1917). [2] Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд (1915). [3] S. Saks, Théorie de l'intégrale (1933). [4] А. Я. Хинчин, Мат. сб., XXX, 543—557.