Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 9

МАТЕМАТИКА

Л. В. КАНТОРОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВЕЗДЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 16 II 1937)

В моей недавней заметке «О последовательностях линейных операций» (1) были даны различные теоремы о сходимости последовательностей линейных операций в полуупорядоченных пространствах. Здесь я даю применения этих теорем главным образом для случая, когда Y есть пространство S измеримых функций. Так как в этом случае (o)-сходимость есть сходимость почти везде (2), то это и дает возможность единым методом установить ряд теорем частью новых, частью уже известных о сходимости почти везде различных последовательностей.

§ 1. Теорема. Пусть X—регулярное полуупорядоченное или линейное нормированное пространство, $U_n(x)$—последовательность линейных операций класса H_t^t, переводящих X в пространство S измеримых функций $\{ y(t) \}$, т. е.

$$y(t) = U_n(x, t);$$

при этом: 1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} U_n(x, t)$ конечен для почти всех t при каждом $x \in X$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x, t)$ существует при почти всех t для x из некоторого множества плотного в X. Тогда последовательность $U_n(x, t)$ сходится для почти всех t при каждом $x \in X$.

Доказательство. Заменяя x на $-x$, видим, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} U_n(x, t)$ конечен при почти всех t. Следовательно для каждого $x \in X$ множество функций $\{ U_n(x, t) \}$ ограничено в S; применяя поэтому теорему 6 моей заметки (1), приходим сразу к заключению теоремы.

Для случая, когда X—нормированное пространство, приведенная теорема была установлена раньше S. Banach'ом (3).

§ 2. Пусть $x(t)$—функция, определенная и суммируемая на промежутке (a, b). Пусть I—подвижный интервал, помещенный около точки s, $|I|$—его длина. Ставим вопрос о сходимости дифференциальных отношений первообразной функции для $x(t)$:

$$U_I(x, s) = \frac{1}{|I|} \int\limits_I x(t)\, dt$$

к $x(s)$, когда $|I| \to 0$. Мы рассматриваем эти дифференциальные отношения как линейные операции.

Если положить

$$x^*(s) = \sup_I U_1(x.\,s),$$

то, как показали Hardy и Littlewood [4], при $x \in L^p$, функция x^* также принадлежит L^p. Следовательно если операции $U_I(x)$ рассматривать как операции из L^p в L^p, то при каждом x их значения образуют (o)-ограниченное множество. Далее очевидно, что для $x(t)$ непрерывных (образующих плотное множество в L^p) последовательность $U_I(x, s)$ будет равномерно сходиться к $x(s)$. Поэтому, применяя теорему 6 [1], приходим к следующему результату:

Если функция x класса L^p, то дифференциальные отношения ее первообразной (o)-сходятся к $x(s)$ в пространстве L^p.

Аналогично доказывается, что если $\int\limits_a^b |x(t)| \lg^+ |x(t)|\, dt < +\infty$, то те же дифференциальные отношения (o)-сходятся к $x(s)$ в L.

Если $x \in L$, то эти дифференциальные отношения не обязательно (o)-сходятся к ней в L. Простым примером этого является функция $x(t)$, определенная в $(0,1)$ так:

$$x(t) = \frac{n!}{n \lg^2 n} \quad \text{при} \quad \frac{1}{(n+1)!} < t \leqslant \frac{1}{n!}.$$

Поэтому представляет некоторый интерес теорема о том, что

Если $x \in L$, то функции $U_1(x, s)$ будут (o)-сходиться к $x(s)$ в пространстве L_T [2], где $T(u) = \dfrac{u}{(1 + \lg_2 u)^{1+\varepsilon}}$. Благодаря теореме 6 достаточно установить, что $x^* \in L_T$. Положим $E_N = E[x^*(s) > N]$. Каждую точку E_N можно окружить интервалом I таким, что $\int\limits_{I_i} |x(t)|\, dt > N |I|$.

Из этих интервалов можно выделить интервалы попарно без общих точек с суммой длин $\geqslant \frac{1}{3} m E_N$. Пусть S—сумма их, тогда имеем очевидно:

$$\frac{1}{3} m E_N \leqslant mS \leqslant \frac{1}{N} \int\limits_S |x(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{N} \int\limits_a^b |x(t)|\, dt.$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b T[x^*(t)]\, dt \leqslant b - a + \sum_{k=2}^{\infty} \int\limits_{E_{2^{k-1}} - E_{2^k}} T[x^*(t)]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (b-a) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{(1 + \lg_2 2^{k-1})^{1+\varepsilon}} m E_{2^{k-1}} \leqslant (b-a) + \Big(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{6}{k^{1+\varepsilon}} \Big) \int\limits_a^b |x(t)|\, dt.$$

§ 3. Пусть l^2—пространство последовательностей $x = (a_1, a_2 \ldots)$; $\sum a_i^2 < +\infty$. Пусть $\{ \varphi_i(t) \}$—система ортогональных и нормированных функций в $a \leqslant t \leqslant b$. Рассмотрим последовательность операций, переводящих l^2 в L^2:

$$y = U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 + \lg k} \varphi_k \qquad (\lg k = \lg_2 k).$$

Мы утверждаем, что последовательность $U_n(x)$ будет (o)-сходиться в L^2. Так как сходимость на элементах вида $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0 \ldots)$ очевидна, достаточно установить (o)-ограниченность последовательности $U_n(x)$ при каждом $x \in l^2$.

Положим

$$s_{h,j}(x) = U_{h2^j+2^{j-1}}(x) - U_{h2^j}(x),$$

$$T(x) = |U_1(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |s_{\frac{1}{2},j}(x)| + \left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}(j+\lg h)|s_{h,j}(x)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда: 1) $T(x) \in L^2$. Действительно

$$\|T(x)\|_{L^2} \leqslant \|U_1(x)\| + \sum_{j=1}^{\infty}\|s_{\frac{1}{2},j}(x)\| + \left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}(j+\lg h)\|s_{h,j}(x)\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant |a_1| + \sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{k=2^{s-1}+1}^{k=2^j}\frac{a_k^2}{(1+\lg k)^2}\right]^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=h2^{j+1}}^{h2^j+2^{j-1}}\frac{a_k^2}{1+\lg k}\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant |a_1| + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\sum_{k=2^{j-1}+1}^{k=2^j}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant |a_1| +$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 4\|x\|_{l^2}.$$

2) $|U_n(x)| \leqslant T(x)$ для всех $x \in X$ и $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть

$$n = \theta_1 + \theta_2 \cdot 2 + \theta_3 \cdot 2^2 + \ldots + \theta_r 2^{r-1} + 2^r \quad (\theta_i = 0, 1).$$

Тогда при подходящих целых h_j, имеем:

$$|U_n(x)| = \left|U_{2^r}(x) + \sum_{j=1}^{r}\theta_j s_{h_j,j}(x)\right|.$$

Применяя теперь неравенство Коши и пользуясь тем, что $2^r \leqslant h_j 2^j$, находим

$$|U_n(x)| \leqslant |U_{2^r}(x)| + \left\{r\sum_{j=1}^{r}|s_{h_j,j}(x)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant |U_1(x)| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{=r}|s_{\frac{1}{2},j}(x)| + \left\{\sum_{j=1}^{r}(j+\lg h_j)|s_{h_j,j}(x)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant T(x).$$

Итак (o)-ограниченность последовательности $\{U_n(x)\}$ доказана, а тем самым установлено и наше утверждение. Легко видеть, что доказанная сейчас теорема представляет известную теорему Меньшова—Rademacher'а ([5]) об ортогональных рядах в несколько усиленной формулировке. В доказательстве мы также использовали основную идею Rademacher'а.

Заметим, что предельная операция $U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+\lg k)} \varphi_k$ будет операцией класса H_l^t, но в общем случае не будет H_0^0.

Институт математики и механики
Ленинградского университета.

Получено
16 II 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] ДАН, XIV, № 3 (1937). [2] Л. В. Канторович, ДАН, III, № 1 (1936). [3] S. Banach, Bull. Sc. Math., **50**, p. 27—32, 36—43 (1926); S. Saks, Fund. Math., **10**, p. 186—196 (1927). [4] Hardy, Littlewood, Polya. Inequalities, p. 298. Cp. Jessen, Marcinkiewitz et Zygmund, Fund. Math., **25**, p. 217. [5] Rademacher, Math. Ann., **87**, 112—138 (1922); Menchoff, Fund. Math., 4, 1923.