Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 9

МАТЕМАТИКА

Л. В. КАНТОРОВИЧ

К ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 16 II 1937)

В этой заметке доказываются некоторые теоремы, частью новые, частью известные, относящиеся к проблеме моментов для интервала (0,1). При доказательстве этих теорем используются, с одной стороны, свойства полиномов Бернштейна, с другой, — некоторые общие идеи функционального анализа.

Введем обозначения. Пусть

$$\mu^{(0)},\ \mu^{(1)},\ \mu^{(2)},\ \ldots \tag{1}$$

последовательность вещественных чисел. Пусть $P(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$; положим $P(\mu)=\sum_{k=0}^{m} a_k \mu^{(k)}$. Условимся писать $P\geqslant 0$, если при всех x в (0,1) $P(x)\geqslant 0$.

§ 1. Теорема 1. [Hausdorff ([1])]. Для того, чтобы существовала убывающая в (0,1) функция $g(x)$, для которой

$$\int_0^1 x^k\,dg(x)=\mu^{(k)} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы при любых k и m было

$$\Delta^m \mu^{(k)}=(1-\mu)^m \mu^{(k)}=\sum_{i=0}^{m} C_m^i(-1)^i \mu^{(k+i)}\geqslant 0. \tag{3}$$

Необходимость. Если монотонная $g(x)$ существует, то при любом $P\geqslant 0$ будет

$$P(\mu)=\int_0^1 P(x)\,dg(x)\geqslant 0.$$

Используя это соотношение для полинома $x^k(1-x)^m$, получаем сразу условие (3).

Достаточность. Пусть $P(x)$—многочлен степени s, рассмотрим полином Бернштейна для него:

$$B_n(P;\ x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} P\left(\frac{k}{n}\right). \tag{4}$$

Если известно, что $P \geqslant 0$, то из вида $B_n(P;\ x)$ и из условия (3) сразу ясно, что

$$B_n(P;\ \mu)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \mu^{(k)} (1-\mu)^{n-k} P\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant 0.$$

Полиномы $B_n(P;\ x)$ степени не выше s равномерно сходятся к $P(x)$, следовательно их коэффициенты стремятся к коэффициентам полинома P и потому $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(P;\ \mu)=P(\mu)$, откуда $P(\mu)\geqslant 0$.

Если теперь $P \geqslant 0$ и $\|P\|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} P(x)$, то [так как $0\leqslant P(x)\leqslant$ $\leqslant \|P\|$] имеем

$$0\leqslant P(\mu)\leqslant \|P\|\,\mu^{(0)}. \tag{5}$$

Пусть теперь $f(x)$—любая непрерывная функция в (0,1). Тогда в силу условия (5) будет существовать предел $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(f;\ \mu)=G(f)$. Далее ясно, что $G(f)$—линейный положительный функционал в пространстве непрерывных функций [$(G(f)\geqslant 0$, если $f\geqslant 0$]. Поэтому он представим в форме

$$G(f)=\int_0^1 f(x)\,dg(x), \tag{6}$$

где $g(x)$—возрастающая функция [$g(0)=0$]. Для функции $g(x)$ и будут очевидно выполнены соотношения (2).

Мы использовали в этом параграфе частично рассмотрения Hildebrandt'a и Schoenberg'a (²).

§ 2. Если условия (3) для последовательности (1) выполнены, то можно указать и прием эффективного нахождения функции $g(x)$. Действительно, пусть $\varkappa(x,\ y)$ функция, равная 1 при $y\leqslant x$ и 0 при $y>x$. Тогда, во всяком случае в точках непрерывности $g(x)$, будем иметь $g(x)=\int\limits_0^1 \varkappa(x,\ y)\,dg(y)$. Построим полиномы $\pi_n(x,\ y)=\sum\limits_{i,\ k=0}^{n} a_{i,\ k}^{(n)} x^i y^k$, стремящиеся убывая к $\varkappa(x,\ y)$. $\Big[$За $\pi_n(x,\ y)$ можно принять например n-й полином Бернштейна, построенный для функции $\frac{1}{n}+\varkappa(x+n^{-\frac{1}{3}},\ y)$.$\Big]$

Полагая теперь

$$g_n(x)=\int_0^1 \pi_n(x,\ y)\,dg(y)=\sum_{i,\ k=0}^{n} a_{i,\ k}^{(n)} \mu^{(k)} x^i,$$

получим последовательность полиномов, сходящихся убывая к $g(x)$ [если x точка разрыва g, то к $g(x+0)$]. Аналогичным образом могут быть построены и приближения снизу к $g(x)$.

§ 3. Представляет интерес выяснение условий для моментов, которые обеспечивали принадлежность функции $g(x)$ другим классам. Мы укажем здесь две подобные теоремы.

Теорема 2. Чтобы существовала функция $g(x)$, удовлетворяющая соотношениям (2) и условию Липшица $|g(x_2)-g(x_1)| \leqslant C|x_2-x_1|$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|\Delta^m \mu^{(k)}| \leqslant C \cdot B(m+1,\ k+1) \quad (k=0, 1, 2, \ldots;\ m=0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Необходимость.

$$|\Delta^m \mu^{(k)}| = \left|\int_0^1 x^k (1-x)^m g'(x)\, dx\right| \leqslant CB(m+1,\ k+1).$$

Достаточность. Пусть для $\mu^{(k)}$ выполнено (7), тогда, полагая $\overline{\mu}^{(k)} = \mu^{(k)} + \frac{C}{k+1}$, получим последовательность, удовлетворяющую условию (3). Числа $\overline{\mu}_k$ будут моментами монотонной функции $\overline{g}(x)$. Полагая $g(x) = \overline{g}(x) - Cx$, получим функцию, удовлетворяющую соотношениям (3).

Теорема 3. Чтобы существовала монотонная функция $g(x)$ класса $A^p(p>1)$, т. е. неопределенный интеграл функции, суммируемой с p-й степенью, удовлетворяющая условиям (3), необходимо и достаточно, чтобы при всех m и k выполнялось неравенство:

$$0 \leqslant \Delta^m \mu^{(k)} \leqslant H\left\{B(mp'+1,\ kp'+1)\right\}^{\frac{1}{p'}}; \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right). \tag{8}$$

Необходимость.

$$0 \leqslant \Delta^m \mu^{(k)} \leqslant \int_0^1 x^k (1-x)^m g'(x)\, dx \leqslant \left\{\int_0^1 x^{kp'}(1-x)^{mp'}\, dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot$$

$$\cdot \left\{\int_0^1 [g'(x)]^p\right\}^{\frac{1}{p}} = H \cdot \left\{B(kp'+1,\ mp'+1)\right\}^{\frac{1}{p'}}.$$

Достаточность. Условие $\Delta^m \mu^{(k)} \geqslant 0$ обеспечивает существование монотонной $g(x)$, решающей проблему моментов (2). Для всех непрерывных и даже для всех ограниченных функций $f(x)$ сможем определить функционал $G(f)$.

Все будет доказано, если мы установим неравенство

$$|G(f)| \leqslant H_1 \left\{\int_0^1 |f'(x)|^{p'}\, dx\right\}^{\frac{1}{p'}}, \tag{9}$$

ибо тогда функционал $G(f)$ может быть распространен на пространство $L^{p'}$, а следовательно функция $g(x)$ должна принадлежать классу A^p. Пусть $\varphi_{c,d}(x)$ означает характеристическую функцию интервала (c, d). Пусть сначала (c, d) малый интервал вида $\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{nh},\ \frac{k}{n}+\frac{1}{nh}\right)$; $h = \sqrt{\frac{n}{2k(n-k)}}$ и $\frac{k}{n}$ не близко к 0 или 1. Рассмотрим многочлен $\chi(x) = \frac{e\sqrt{\pi}}{h} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$. Тогда, так как $\chi(x)$ близко к $e^{1-(nh)^2\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}$, будем иметь $\chi(x) \geqslant 1$ в (c, d). Откуда $G(\varphi_{c,d}) \leqslant G(\chi)$. В силу условия (8) для $f=\chi$ неравенство (9) справедливо при $H_1 = H$. Далее легко видеть, что

$$\left\{\int_0^1 |\chi(x)|^{p'}\,dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \leqslant A_{p'}\left\{\int_0^1 |\varphi_{c,\,d}(x)|^{p'}\,dx\right\}^{\frac{1}{p'}},$$

где $A_{p'}$—постоянная. Сопоставление этих неравенств показывает, что неравенство (9) справедливо для $f=\varphi_{c,\,d}$, если взять $H_1=A_{p'}\cdot H+\varepsilon$, где ε как угодно мало вместе с интервалом $(c,\ d)$. Далее произвольный интервал может быть составлен дизъюнктивно из рассмотренных только что малых интервалов. Поэтому для любого $(c,\ d)$ будет справедливо (9) при $H_1=A_{p'}\cdot H$. Наконец отсюда уже ясно, что то же неравенство будет справедливо для любой ступенчатой функции (ибо при сложении характеристических функций дизъюнктивных промежутков будет $\int_0^1\left|\sum\varphi_{c_n,\,d_n}(x)\right|^{p'}dx=\sum\int_0^1|\varphi_{c_n,\,d_n}(x)|^{p'}dx$). И наконец (9) справедливо и для любой ограниченной функции f.

Заметим, что другие, по моему мнению, более сложные решения вопросов, рассмотренных в теоремах 2 и 3, имеются в работе Boas jr. R. P. (3).

§ 4. Пусть M обозначает пространство ограниченных функций $f(x)$, определенных на (0,1). Норму определяем как $\|f\|=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$. E называем линейным подмножеством M, если вместе с f_1 и f_2 в него входит $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$. Аддитивный функционал $G(f)$, определенный на E, называем положительным, если при $f\geqslant 0$ будет $G(f)\geqslant 0$. Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть E_0—линейное подмножество M, в которое входит 1 [1 обозначает функцию $f(x)\equiv 1$ в (0,1)], и на E определен положительный аддитивный функционал $G(f)$. Тогда с сохранением положительности этот функционал может быть распространен на все M.

Доказательство. Пусть f^*—некоторый элемент M, не входящий в E_0. Рассмотрим числа:

$$m=\sup_{f_1<f^*}G(f_1);\quad M=\inf_{f_2>f^*}G(f_2);\quad (f_1,\ f_2\in E_0).$$

Число M наверное конечно, так как, принимая в качестве f_2 элемент $\|f^*\|\cdot 1$, находим $M\leqslant\|f\|\cdot G(1)$. Далее для любых f_1 и f_2, так как $f_1<f^*<f_2$, будет $f_1\leqslant f_2$, и $G(f_1)\leqslant G(f_2)$, а следовательно $m\leqslant M$.

Пусть $m\leqslant\mu\leqslant M$. Обозначим через E_1 множество элементов вида $f=f_0+\alpha f^*$, где $f_0\in E_0$ и α—вещественное число. Определим функционал G на E_1 так:

$$G(f)=G(f_0)+\alpha\mu.$$

Это определение однозначно, так как по $f\in E_1$ число α и элемент $f_0\in E_0$ определяются единственным образом. Очевидно, что если $f\in E_0$, то $\alpha=0$ и значения функционала на E_0 остались неизменными, т. е. мы имеем распространение. Далее на E_1 функционал G положителен. Действительно, пусть $f\in E_1$, $f\geqslant 0$; $f=f_0+\alpha f^*$, и например $\alpha>0$. Тогда $-\frac{1}{\alpha}f_0<f^*$, следовательно $-\frac{1}{\alpha}G(f_0)\leqslant m\leqslant\mu$ и потому $G(f)=G(f_0)+\alpha\mu\geqslant 0$. Для $\alpha<0$ рассуждение аналогично.

Подобно тому, как был прибавлен элемент f^*, можно добавлять другие независимые элементы, пока все M не будет исчерпано [Сравни аналогичные рассуждения в теореме Hahn'a-Banach'a (4)]. Итак, лемма доказана.

Теорема 4. Пусть даны в конечном или бесконечном числе элементы пространства C непрерывных функций

$$f_0 = 1,\ f_1,\ f_2,\ \ldots$$

и числа $\mu^{(0)}$, $\mu^{(1)}$, ... Тогда, чтобы существовал в C положительный функционал $G(f)$, а с ним соответствующая ему монотонная в $(0,1)$ функция $g(x)$, такая, что выполнено

$$G(f_i) = \int_0^1 f_i(x)\, dg(x) = \mu^{(i)}, \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых вещественных чисел α_0, α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ неравенство $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$ влекло за собой неравенство $\sum \alpha_i \mu^{(i)} \geqslant 0$.

Необходимость. Пусть G существует. Тогда, если $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i \geqslant 0$, то $G\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i\right) \geqslant 0$, т. е. $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i G(f_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu^{(i)} \geqslant 0$.

Достаточность. Примем за E_0 в лемме множество элементов вида $f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$ (n—любое). Тогда, если на E_0 положить $G(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu^{(i)}$, то функционал $G(f)$ будет положителен на E_0. Распространим его на M (по лемме) с сохранением положительности. Положительный функционал $G(f)$ будет определен в M, тем более в C, а потому он выражается интегралом Стилтьеса с монотонной $g(x)$:

$$G(f) = \int_0^1 f(x)\, dg(x).$$

Этот функционал G и дает решение задачи.

§ 5. Здесь мы в качестве применения теоремы 4 устанавливаем теорему М. Крейна и Н. Ахиезера ([5]) о продолжении последовательности моментов. Сама проблема продолжения была поставлена еще акад. А. А. Марковым ([6]).

Теорема 5. Пусть даны числа $\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(n)}$. Для того, чтобы существовала монотонная функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^1 x^{\nu}\, dg(x) = \mu^{(\nu)}, \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ m) \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы были положительны квадратичные формы:

$$\sum_{i,\,j=0}^{k} \mu^{(i+j+1)} a_i a_j; \quad \sum_{i,\,j=0}^{k} (\mu^{(i+j)}\ \mu^{(i+j+1)}) a_i a_j \text{ при } m = 2k+1,$$

$$\sum_{i,\,j=0}^{k} \mu^{(i+j)} a_i a_j; \quad \sum_{i,\,j=0}^{k-1} (\mu^{(i+j+1)}\ \mu^{(i+j+2)}) a_i a_j \text{ при } m = 2k.$$

Доказательство. Пусть $P(x) = \sum_{i=0}^{m} h_i x^i$, положим $H^2(P) = \sum_{i=0}^{m} h_i \mu^{(i)}$.

Очевидно, существует среди полиномов $P(x) \geqslant 0$ в $(0,1)$, удовлетворяющих условию $H(P) = 1$ такой, для которого величина $P(\mu) = \sum_{i=0}^{m} h_i \mu^{(i)}$ наименьшая, пусть это будет полином $P_0(x)$. Утверждаем, что все m корней $P_0 x$ лежат в $0,1$.

Пусть корни $P_0(x)$ в $(0,1)$ суть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j$ $(j \leqslant m)$. Положим $\pi(x) = A(x - \xi_1)\ldots(x - \xi_j)$, где множитель A подберем так, чтобы $H(\pi) = 1$. Если $j = 0$, полагаем $\pi(x) = 1$. Положим

$$P_1(x) = [P_0 x + \lambda\pi(x)] H^{-1}(P_0 + \lambda\pi).$$

Тогда, если $|\lambda|$ достаточно мал, будем иметь $P_1(x) \geqslant 0$ в $(0,1)$. С другой стороны,

$$P_1(\mu) = \frac{P_0(\mu) + \lambda\pi(\mu)}{H(P_0 + \lambda\pi)} = \frac{P_0(\mu) + \lambda\pi(\mu)}{\sqrt{1 + \lambda[H^2(P_0 + \Pi) - 2] + \lambda^2}}.$$

Так как многочлен P_0 доставляет минимум, то при всех λ непременно $P_1(\mu) \geqslant P_0(\mu)$, а это возможно в единственном случае, когда $\pi(\mu) = \pm P_0(\mu)$ и $H^2(P_0 + \Pi) - 2 = \pm 2$. Но последнее условие означает, что $P_0(x) = \pm\pi(x)$, и тот факт, что все корни $P_0(x)$ лежат в $(0,1)$, установлен. Так как $P_0(x)$ положителен, то все внутренние его корни имеют четную кратность, а потому $P_0(x)$—полином, имеющий вид

$$x R_k^2(x) \quad \text{или} \quad (1 - x) R_k^2(x), \qquad \text{если} \quad m = 2k + 1,$$

$$R_k^2(x) \quad \text{или} \quad (x - x^2) R_{k-1}^2(x), \quad \text{если} \quad m = 2k,$$

где $R_k(x)\,[R_{k-1}(x)]$—многочлены степени x (соответственно $k - 1$).

Пусть например $P_0(x) = xR_k^2(x)$, тогда

$$P_0(\mu) = \mu\Big(\sum_{i=0}^{k} a_i \mu^{(i)}\Big)^2 = \sum_{i,\,j=0}^{k} \mu^{(i+j+1)} a_i a_k \geqslant 0$$

в силу условия теоремы. Аналогично в остальных случаях. Так как $P_0(\mu) \geqslant 0$, то и для всякого полинома $P \geqslant 0$ будет $P(\mu) \geqslant 0$. Принимая теперь теорему 4 (для $f_1 x = x^i$; $i = 0, 1, 2, \ldots, m$), убеждаемся в существовании функции $g(x)$, удовлетворяющей условиям (10).

Замечание. Если бы мы пожелали, чтобы функция $g(x)$ в теореме 5 удовлетворяла дополнительно условию $g(x_2) - g(x_1) \leqslant C(x_2 - x_1)$, то, пользуясь рассуждениями теоремы 2, мы могли бы убедиться, что нужно потребовать еще в условии теоремы 5, чтобы упомянутые в ней формы оставались положительными, если заменить в них числа $\mu^{(i)}$ на $\frac{C}{k+1} - \mu^{(i)}$.

Другое решение этого вопроса дано М. Крейном и Н. Ахиезером (7).

Институт математики и механики
при Ленинградском университете.

Поступило
16 II 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Hausdorff, Math. ZS. [2] T. H. Hildebrandt and J. J. Schoenberg, Annals of Math., 34, 317—328 (1933). [3] R. P. Boas, jr., Duke Math. J. 1, 449—476 (1935). [4] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, p. 27, Warszawa (1932). [5] N. Achyeser u. M. Krein, Comm. de la Soc. Math. de Kharkoff, ser. 4, t. 11, p. 21—26 (1935). [6] А. А. Марков, О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей, СПБ (1884). См. также Записки Акад. Наук, т. III, № 5 (1896). [7] N. Achyeser u. M. Krein, Comm. de la Soc. Math. de Kharkoff, ser. 4, t. 12, p. 13—35 (1935).