Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Механика»

О. Н. Шабловский, В. Ю. Гавриш, Н. В. Иноземцева

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ДИНАМИКА

ПРАКТИКУМ
для студентов технических специальностей
дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2023

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
Ш13

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 4 от 04.04.2023 г.*)

Рецензент: проф. каф. теоретической физики ГГУ им. Ф. Скорины д-р физ.-мат. наук *Н. В. Максименко*

Шабловский, О. Н.

Ш13 Теоретическая механика. Динамика : практикум для студентов техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / О. Н. Шабловский, В. Ю. Гавриш, Н. В. Иноземцева. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2023. – 80 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-523-7.

Содержит задачи, охватывающие основные разделы динамики материальной точки и динамики механической системы. Приведенные задания предназначены как для выполнения расчетно-графических работ, так и для самостоятельных работ студентов.

Для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

ISBN 978-985-535-523-7

© Шабловский О. Н., Гавриш В. Ю., Иноземцева Н. В., 2023
© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2023

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Введение

Данный практикум не содержит подробных выводов основных формул и теорем, поэтому изучение теоретического материала некоторых разделов рекомендуется проводить самостоятельно.

Основное уравнение динамики материальной точки

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

(второй закона Ньютона) и следующие из этого уравнения две задачи динамики подробно изложены в [1, 2]. Определение кинетической энергии точки

$$T = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)\right), \tag{2}$$

работы силы

$$A_{1,2}(\vec{F}) = \int_{s_1}^{s_2} F_{\text{ф}} ds = \int_{t_1}^{t_2} \left(F_x v_x(t) + F_y v_y(t) + F_z v_z(t)\right) dt, \tag{3}$$

а также теорему об изменении кинетической энергии точки

$$A_{1,2}(\vec{F}) = T(t_2) - T(t_1) \tag{4}$$

рекомендуется изучать по учебникам [2–4].

Задачи о колебаниях материальной точки сводятся к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Ниже приведем основные соотношения из теории колебаний (результаты будут использоваться в задачах 5–7).

Движение точки массы m под действием силы упругости и силы сопротивления вдоль оси OX описывается уравнением

$$m\ddot{x}(t) = \left(\vec{F}_{\text{упр}}\right)_x + \left(\vec{F}_{\text{сопр}}\right)_x \tag{5}$$

или с использованием выражений

$$\left(\vec{F}_{\text{упр}}\right)_x = -cx(t); \ \left(\vec{F}_{\text{сопр}}\right)_x = -\alpha\dot{x}(t),$$

Библиотека ГГТУ им. П. О. Сухого

где c – жесткость упругого элемента $(c > 0,\ [c] = \text{Н/м} = \text{кг/с}^2)$, α – коэффициент сопротивления $(\alpha > 0,\ [\alpha] = (\text{Н} \cdot \text{с})/\text{м} = \text{кг/с})$. В результате получаем

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + cx(t) = 0. \tag{6}$$

После приведения уравнения (6) к стандартному виду

$$\ddot{x}(t) + 2\text{в}\dot{x}(t) + \text{щ}_0^2 x(t) = 0;\ \text{в} = \frac{\alpha}{2m};\ \omega^2 = \frac{c}{m}, \tag{7}$$

где β – параметр сопротивления среды; ω – параметр упругости (собственная частота), получаем дифференциальное уравнение, описывающее различные случаи колебаний материальной точки.

Случай $\beta = 0$ соответствует свободным колебаниям с периодом $T = 2\pi/\omega$:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{8}$$

Решением уравнения (8) является выражение

$$x(t) = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right), \tag{9}$$

в котором A – амплитуда колебаний и φ_0 – начальная фаза [5, 6]:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{0x}}{\omega}\right)^2};\ \varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega x_0}{v_{0x}}\right). \tag{10}$$

Эти величины определены через начальную координату $x_0 = x(0)$ и начальную скорость точки $v_{0x} = \dot{x}(0)$.

Основным свойством свободных колебаний является постоянная амплитуда.

Графики колебательного процесса для различных значений начальных условий представлены на рис. 1.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

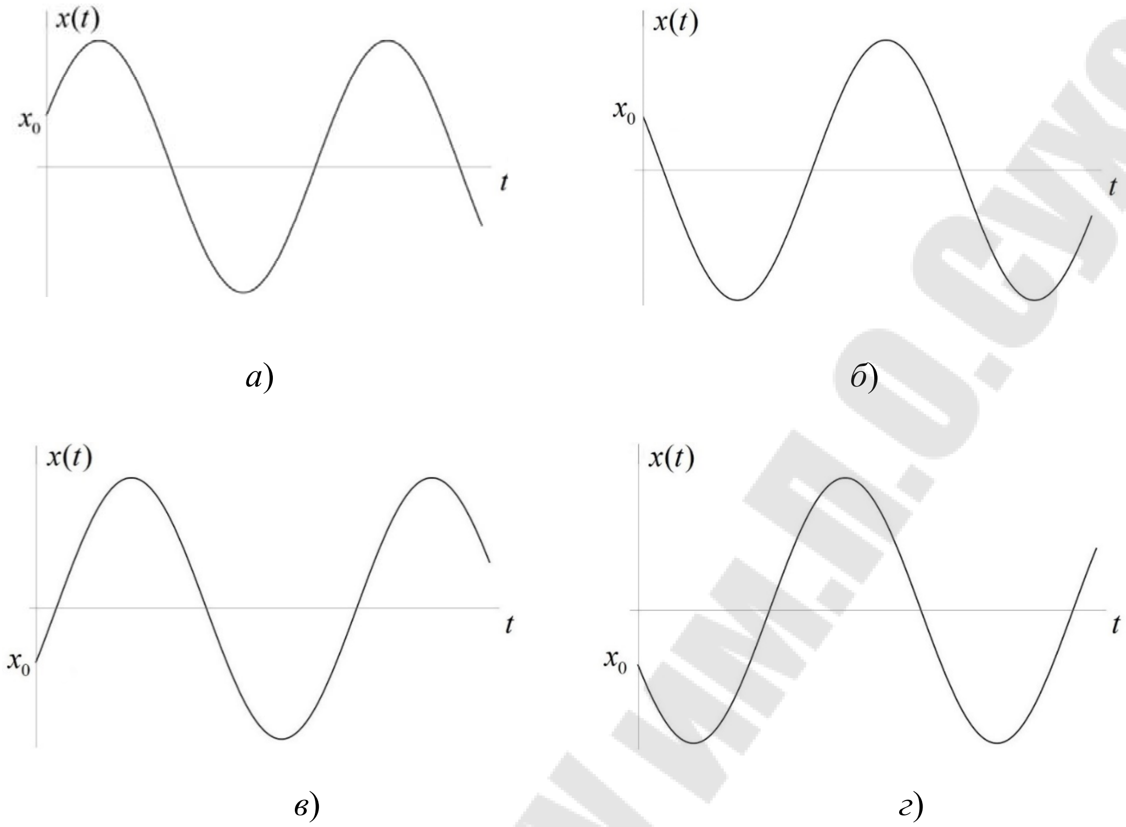


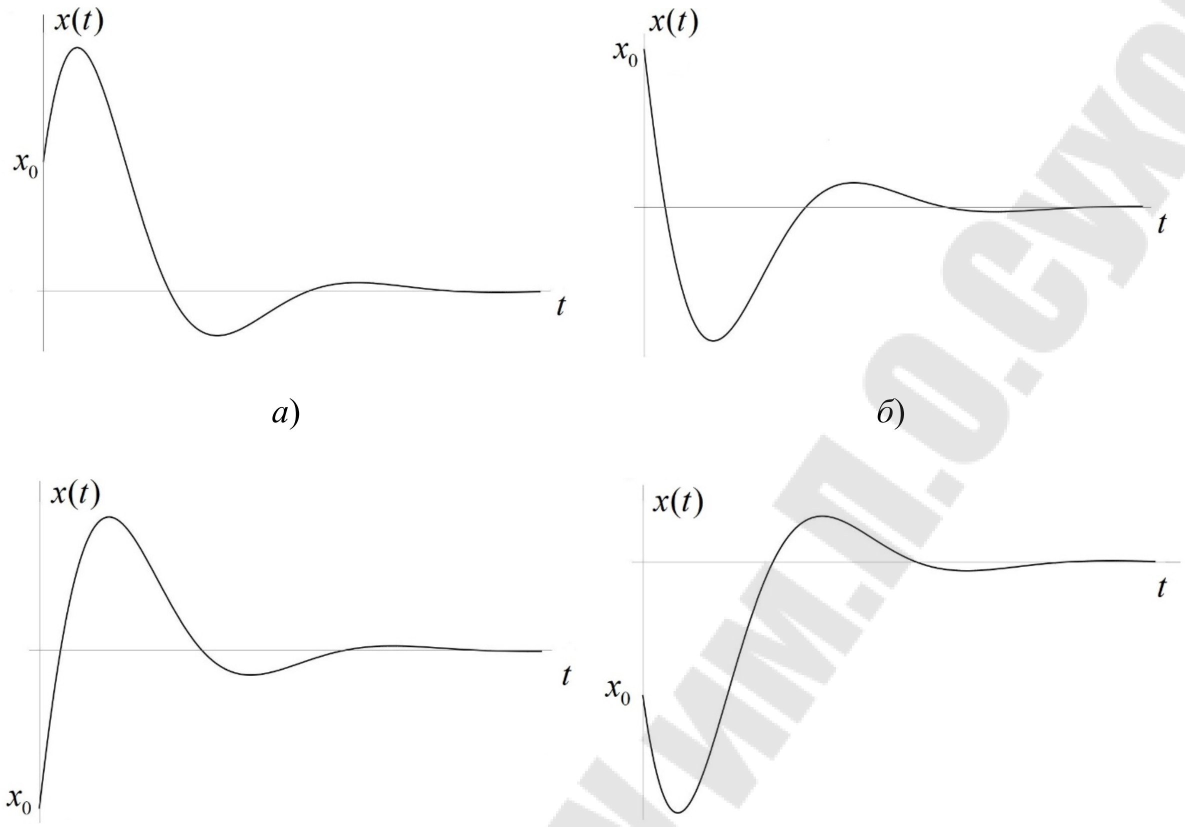
Рис. 1. Графики свободных колебаний для различных знаков x_0 и v_{0x}:
а – график свободных колебаний в случае $x_0 > 0$, $v_{0x} > 0$; *б* – график свободных колебаний в случае $x_0 > 0$, $v_{0x} < 0$; *в* – график свободных колебаний в случае $x_0 < 0$, $v_{0x} > 0$; *г* – график свободных колебаний в случае $x_0 < 0$, $v_{0x} > 0$

Случаю затухающих колебаний соответствует значение $\text{в} > 0$. Если выполняется соотношение $\text{в} \geq \text{щ}$, то имеем режим апериодического затухания, так как сила сопротивления преобладает над силой упругости. Решение дифференциального уравнения (7) в таком случае примет следующий вид:

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\text{в}+\sqrt{\text{в}^2-\text{щ}^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\text{в}-\sqrt{\text{в}^2-\text{щ}^2}\right)t}. \qquad (11)$$

Константы C_1, C_2 определяются из начальных условий x_0 и v_{0x}. Графики апериодического режима колебаний для различных значений x_0 и v_{0x} представлены на рис. 2.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого



а) *б*)

в) *г*)

Рис. 2. Графики апериодического движения для различных начальных условий x_0 и v_{0x}:
а – график колебаний в случае $x_0 > 0$, $v_{0x} > 0$; *б* – график колебаний в случае $x_0 > 0$, $v_{0x} < 0$; *в* – график колебаний в случае $x_0 < 0$, $v_{0x} > 0$; *г* – график колебаний в случае $x_0 < 0$, $v_{0x} < 0$

Наконец, случаю $\text{щ} > \text{в}$ соответствует периодический режим затухающих колебаний с периодом $T_{\text{з.к}} = 2\text{р}\big/\sqrt{\text{щ}^2 - \text{в}^2}$, так как сила упругости преобладает над силой сопротивления. Решением дифференциального уравнения (7) в таком случае является

$$x(t) = ae^{-\text{в}t} \sin\left(\sqrt{\text{щ}^2 - \text{в}^2}\, t + \text{ц}_0\right), \quad (12)$$

где a и ц_0 определяются из начальных условий [6, 7]. Амплитуда A затухающих колебаний из (10) определяется как

$$A_{\text{з.к}}(t) = ae^{-\text{в}t};\ A_{\text{з.к}} \to 0 \text{ при } t \to \infty. \quad (13)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Графики периодического режима затухающих колебаний для различных значений x_0 и v_{0x} представлены на рис. 3.

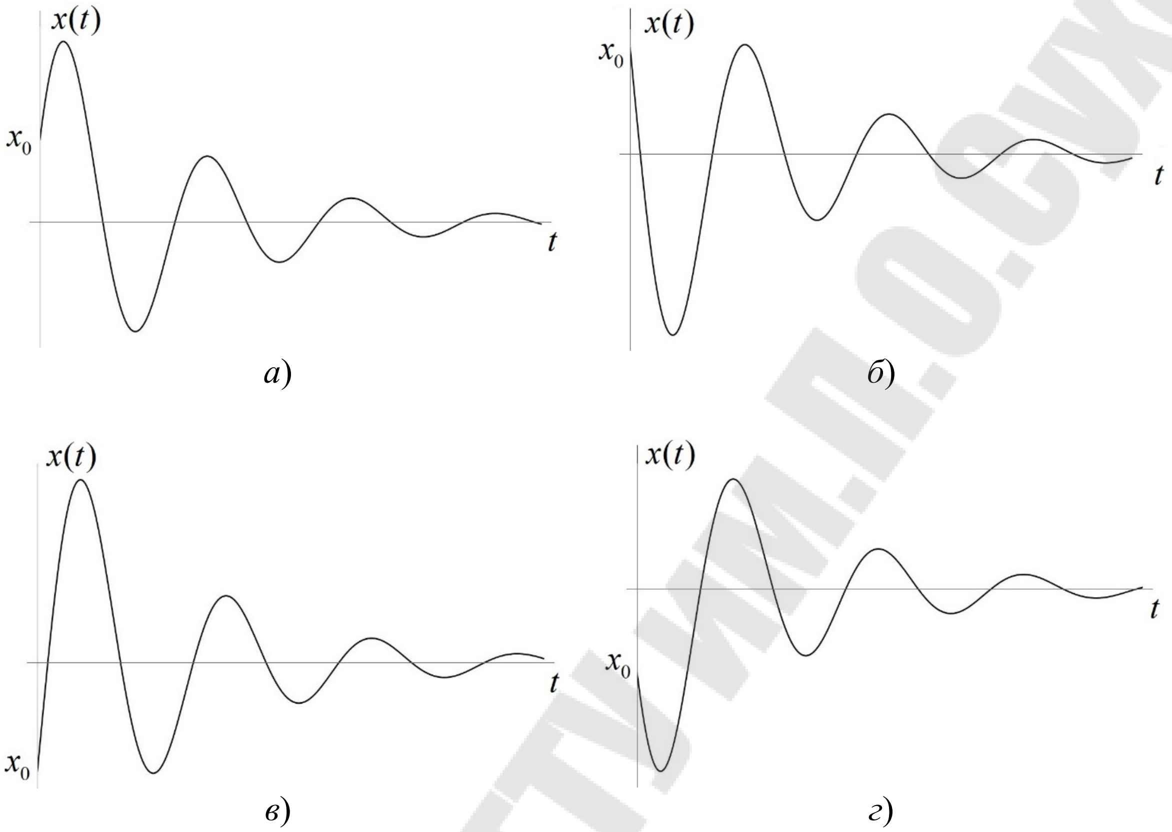


Рис. 3. Графики периодического затухания для различных начальных условий x_0 и v_{0x}:
а – график колебаний в случае $x_0 > 0$, $v_{0x} > 0$; *б* – график колебаний в случае $x_0 > 0$, $v_{0x} < 0$; *в* – график колебаний в случае $x_0 < 0$, $v_{0x} > 0$; *г* – график колебаний в случае $x_0 < 0$, $v_{0x} < 0$

Задача 8 посвящена вынужденным колебаниям. Ниже кратко определим основные соотношения в изучаемом случае. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний записывается в виде

$$m\ddot{x}(t) = -cx(t) + H\sin(pt + \text{д}), \tag{14}$$

где H – амплитуда возмущающей силы и p – ее частота. Приведем (14) к стандартному виду:

$$\ddot{x}(t) + \text{щ}^2 x(t) = h\sin(pt + \text{д}), \tag{15}$$

где $h = H/m$ и $\text{щ}_0^2 = c/m$ – собственная частота колебаний. Отметим, что случай $p < \text{щ}$ соответствует вынужденным колебаниям малой

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

частоты, $p > \text{щ}$ – вынужденным колебаниям большой частоты. В случае $p = \text{щ}$ наступает резонанс колебаний. В примере решения задачи 8 будет изложена процедура решения дифференциального уравнения (14), поэтому ниже приведем ответ только для случая резонанса [8, 9]:

$$x(t) = A\sin\left(\text{щ}t + \text{ц}_0\right) + x_{\text{резонанс}}(t), \tag{16}$$

где

$$x_{\text{резонанс}}(t) = \frac{h}{2\text{щ}} t \sin(pt + \text{д} - \frac{\text{р}}{2}). \tag{17}$$

Зависимость $x_{\text{резонанс}}(t)$ представлена на рис. 4.

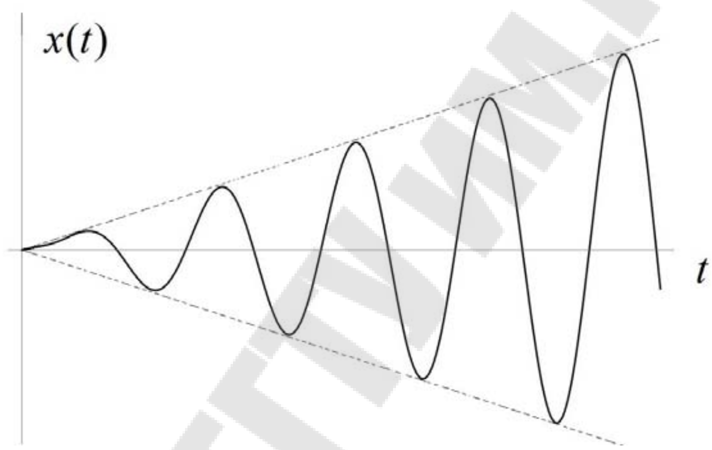


Рис. 4. График вынужденных колебаний точки при резонансе

Задача 9 посвящена динамике вращательного движения тела. Основное уравнение

$$\vec{M} = J_z \vec{\text{е}} \tag{18}$$

используется для решения задачи о вращении однородного диска с моментом инерции $J_z = mR^2/2$. Отметим, что общее выражение и примеры расчета моментов инерций однородных тел представлены в [7, 10].

Раздел аналитической механики предлагаемого практикума посвящен уравнению Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \tag{19}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

для систем с одной степенью свободы. Вывод уравнения Лагранжа, а также определение обобщенной силы Q изложены в [5, 11].

Отметим также, что в практикуме используется элементы дифференциального и интегрального исчислений. Эти теоретические вопросы подробно изложены в учебниках [9, 12, 13].

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

ЗАДАЧА № 1

Точка M массы m движется вдоль прямой OX указанному закону $x(t)$.

Найти:

1. Скорость $v_x(t)$, а также ускорение точки $a_x(t)$.
2. Выражение для силы, действующую на точку $F_x(t)$, модуль силы в указанный момент времени t_1.
3. Работу силы $A(F_x)$ при $t \in [t_1, t_2]$.
4. Импульс силы при $t \in [t_2, t_3]$.

Исходные данные приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Исходные данные

№ п/п	*m*, кг	*x*(*t*), м	*t*₁, с	*t*₂, с	*t*₃, с
1	2,5	$-3t^2 + 3\cos((\mathrm{p}t)/4)$	1,5	2	7
2	1,5	$t^3 - 4\cos((\mathrm{p}t)/4)$	2,5	5,5	9
3	2	$8e^t - \sin((\mathrm{p}t)/2)$	3	2	7
4	3,5	$\cos((\mathrm{p}t)/2) + 6\sin((\mathrm{p}t)/3)$	4	3	9,5
5	4	$5e^t + \sin((\mathrm{p}t)/4)$	1,5	5	8,5
6	2,5	$t^2 - 3\sin((\mathrm{p}t)/3)$	2	5,5	8,5
7	3	$t^3 + e^{3t} - 4\cos((\mathrm{p}t)/2)$	1	4,5	8,5
8	4	$e^t - t^2 - 5\cos((\mathrm{p}t)/3)$	2,5	5	7,5
9	2,5	$-3t^3 + 2\cos((\mathrm{p}t)/3)$	3	4,5	7
10	1,5	$6t^2 + 3\sin((\mathrm{p}t)/4)$	3	3	7,5
11	2,5	$6\cos((\mathrm{p}t)/4)$	0,5	2	7,5
12	3,5	$-2e^t + 2\sin((\mathrm{p}t)/2)$	1,5	1	9
13	1	$4e^t + 6t^3 - 5\sin((\mathrm{p}t)/4)$	0,5	4	9,5
14	3	$t^3 - 3\sin((\mathrm{p}t)/4)$	4	2	6,5
15	3,5	$\cos((\mathrm{p}t)/2) + 8\sin((\mathrm{p}t)/4)$	0,5	4,5	8,5
16	3	$e^t - 4\cos((\mathrm{p}t)/4)$	4	5	6,5
17	3	$2\cos((\mathrm{p}t)/2) - 4\sin((\mathrm{p}t)/3)$	1,5	4	7,5
18	3	$7e^t + 2t^2 - 5\sin((\mathrm{p}t)/2)$	2	3	9
19	3	$e^{2t} + 7t^3 + 2\cos((\mathrm{p}t)/3)$	1	5	9,5

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Продолжение табл. 1.1

№ п/п	m, кг	$x(t)$, м	t_1, с	t_2, с	t_3, с
20	3,5	$3e^{3t} - t + \cos((pt)/2)$	4	5,5	9
21	2,5	$6t^2 - 8\cos((pt)/2)$	2,5	5	7,5
22	1	$4t^3 + 6\sin((pt)/4)$	3,5	1	9,5
23	2,5	$5t^3 + 6\cos((pt)/4)$	2,5	3	8,5
24	1	$5e^{2t} + \sin((pt)/2)$	1,5	4	8
25	4	$3\cos((pt)/3) - 2\sin((pt)/4)$	2	1	6,5
26	2,5	$e^{t} + 8t + 2\cos((pt)/2)$	0,5	1	8
27	1	$-5t^2 + 3t + 6\sin((pt)/3)$	0,5	2	10
28	1	$3e^{3t} - 5\sin((pt)/2)$	3	4	10
29	3,5	$8e^{2t} + 3\cos((pt)/4)$	3,5	4,5	7
30	3	$2t^2 + 6\cos((pt)/4)$	0,5	1	7
31	4	$4t^2 + 6\cos((pt)/4)$	3	5	7
32	3	$\cos((pt)/6) + t - 2\sin((pt)/4)$	0,5	2	8
33	2	$\cos((pt)/2) - 7\sin((pt)/3)$	3,5	3	9
34	0,5	$4e^{2t} - t^2 + 4\sin((pt)/2)$	2,5	1	7
35	1	$2\cos((pt)/2) - 5\sin((pt)/2)$	4	3	7,5
36	2	$7e^{3t} - 2\cos((pt)/4) + t^2$	1	5	10
37	1	$e^{2t} + 7\cos((pt)/2)$	1	2	9
38	2	$7e^{2t} + 2t^2 - \sin(pt)$	1	3	7
39	3,5	$e^{4t} - 2\cos((pt)/3)$	2,5	3	6,5
40	1,5	$5e^{t} + 6t^3 - 4\sin((pt)/4)$	3,5	1	9,5
41	2	$-5e^{3t} + \cos((pt)/4)$	3	4,5	10
42	1,5	$e^{2t} + 5t^2 + 8t^3 - 3$	0,5	1	9,5
43	2,5	$8t^3 - 4\cos((pt)/3)$	2,5	3	8,5
44	1,5	$8t^3 + 3\sin((pt)/4)$	3	4	7,5
45	1	$e^{3t} - 5t^3 - 4\cos((pt)/4)$	1	5	9,5
46	2	$-5t^3 + 8\cos((pt)/3)$	3,5	4	9
47	2	$5e^{2t} + 7\sin((pt)/2)$	1	4	8,5
48	1,5	$8e^{t} + 7t^2 + 4\cos((pt)/3)$	3	5,5	9
49	1,5	$-3t^2 + 7\cos((pt)/2)$	1,5	3	9
50	2	$4e^{3t} + 6t + 4\sin((pt)/4)$	1	5,5	8
51	4	$t^2 - 3t - 5\sin((pt)/2)$	2	3	9
52	3,5	$5t^3 - e^{t} + \sin((pt)/4)$	3	4	9

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Продолжение табл. 1.1

№ п/п	*m*, кг	*x*(*t*), м	t_1, *с*	t_2, *с*	t_3, *с*
53	1,5	$3e^t + 3t + 8\cos((pt)/2)$	2	5,5	8,5
54	2,5	$7\sin((pt)/4) - t^2 + 5$	4	4,5	8
55	0,5	$2t + \cos((pt)/3) + \sin((pt)/2)$	1	3	9,5
56	3	$3t^4 - 5\cos((pt)/4)$	1	1	8
57	1,5	$7\cos((pt)/4) + 4\sin((pt)/3)$	3	3	6,5
58	0,5	$2t^3 + \cos((pt)/2) + 5\sin((pt)/4)$	0,5	3	9,5
59	3,5	$e^t + 2t^2 - \sin((pt)/4)$	3	5,5	7,5
60	1,5	$3\sin((pt)/3) - 4e^{2t} + 3$	3,5	4,5	6,5
61	4	$5e^t + 2\sin((pt)/3) - t^2$	0,5	4	7
62	3,5	$2\sin((pt)/4) - 5\cos((pt)/3)$	1	5	9,5
63	3,5	$e^t - 2\cos((pt)/3)$	1	2	8
64	4	$-3e^t + 3\cos((pt)/3)$	1	3	10
65	2	$4e^{(2t)} - \cos((pt)/4)$	1,5	2	7
66	2	$2\cos((pt)/3) + \sin((pt)/4)$	1,5	5	8,5
67	1	$3\cos((pt)/2) - 5\sin((pt)/3)$	1	5,5	8,5
68	4	$t + 6\cos((pt)/4) - 3\sin((pt)/3)$	0,5	4,5	10
69	3	$-\cos((pt)/4) - 2\sin((pt)/3)$	0,5	1	10
70	1	$2e^{3t} + 4\cos((pt)/3) + \sin((pt)/4)$	4	1	8,5
71	1,5	$5\cos((pt)/2) - 2\sin((pt)/3)$	2,5	3	9,5
72	3,5	$\sin((pt)/4)$	1	4	9
73	4	$5e^t + 3\cos((pt)/2) - 2\sin((pt)/2)$	1	2	6,5
74	3	$3\cos((pt)/2) - 3\sin((pt)/3)$	0,5	2	7,5
75	0,5	$6e^{(2t)} + 6t^3$	2,5	4	8
76	3	$2t + 2\cos((pt)/2)$	3	5,5	10
77	3,5	$\cos((pt)/3) + \sin((pt)/4)$	2	3	7
78	1,5	$5e^{2t} - \cos((pt)/4) + 5\sin((pt)/3)$	1	4	7,5
79	2,5	$-2t^3 + 6\sin((pt)/3)$	1,5	2	7
80	2,5	$3e^{2t} + t^2 + 6\cos((pt)/3)$	3,5	4,5	8
81	1	$-5\cos((pt)/3) + \sin((pt)/3)$	2,5	4,5	7
82	0,5	$4\cos((pt)/4) + 4\sin((pt)/3)$	1,5	3	8
83	1,5	$e^t - 2\cos((pt)/3)$	2	4	7,5
84	1,5	$3t + 8\cos((pt)/4) + 5\sin((pt)/2)$	1,5	1	9
85	2	$8t + 2\cos((pt)/2) + 8\sin((pt)/2)$	4	4,5	9,5
86	4	$3e^{2t} + 7\cos((pt)/3) - 5t$	3,5	5	8,5

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Окончание табл. 1.1

№ п/п	*m*, кг	*x*(*t*), м	t_1, с	t_2, с	t_3, с
87	2	$7\cos((\pi t)/2)+6\sin((\pi t)/3)$	2,5	2	6,5
88	1	$t^2+6\cos((\pi t)/4)+5\sin((\pi t)/2)$	1,5	5	7,5
89	2,5	$-5\sin((\pi t)/3)$	2,5	4	6,5
90	3,5	$e^{4t}+t^4+7\sin((\pi t)/3)$	3	5,5	10
91	2	$3t^2+5\cos((\pi t)/4)-4\sin((\pi t)/4)$	2,5	2	8,5
92	2	$3e^{3t}-3t^2+4\cos((\pi t)/3)$	2,5	1	8,5
93	1	$8t^3+3\cos((\pi t)/2)+6\sin((\pi t)/3)$	4	5,5	7,5
94	0,5	$4e^{3t}-2t^2-2\cos((\pi t)/2)$	3	3	7,5
95	4	$e^t+8\cos((\pi t)/2)$	1,5	4,5	10
96	0,5	$4t+\sin((\pi t)/3)$	1	2	6,5
97	3	$3t^2+2\cos((\pi t)/2)-5\sin((\pi t)/4)$	2,5	3	10
98	1	$4e^{3t}+2t^2+4\cos((\pi t)/4)$	1	2	7,5
99	2,5	$3t-3\cos((\pi t)/3)-4\sin((\pi t)/2)$	2	3	7
100	3,5	$2t+8\cos((\pi t)/4)+\sin((\pi t)/4)$	2	4	9

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: $x(t)=t^2+\sin\big((\pi t)/6\big)-e^t$ м; $t_1=1$ с; $t_2=5$ с; $t_3=7$ с; $m=2$ кг.

Используя векторные формулы

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\dot{\vec{r}}(t);\ \vec{a}=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\dot{\vec{v}}(t), \tag{1.1}$$

определим скорость и ускорение точки:

$$v_x(t)=\dot{x}(t)=\frac{d}{dt}\Big(t^2+\sin\big((\pi t)/6\big)-e^t\Big)=2t+\frac{\pi}{6}\cos\big((\pi t)/6\big)-e^t; \tag{1.2}$$

$$a_x(t)=\dot{v}_x(t)=\frac{d}{dt}\left(2t+\frac{\pi}{6}\cos\big((\pi t)/6\big)-e^t\right)=$$

$$=2-\frac{\pi^2}{36}\sin\big((\pi t)/6\big)-e^t. \tag{1.3}$$

Кинетическую энергию и силу, действующую на точку, определим с использованием выражений (1.2), (1.3). Для силы [см. (1)] из выражения (1.3) получаем

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$F_x(t) = ma_x(t) = 4 - \frac{\pi^2}{18}\sin\left((\pi t)/6\right) - 2e^t. \tag{1.4}$$

Для кинетической энергии [см. (2)] аналогично:

$$T(t) = \frac{mv_x^2(t)}{2} = \left(2t + \frac{\pi}{6}\cos\left((\pi t)/6\right) - e^t\right)^2. \tag{1.5}$$

Вычисление силы в момент времени $t_1 = 1\,c$ проведем с использованием выражения (1.4):

$$F_x(t_1) = 4 - \frac{\pi^2}{18}\sin\left((\pi t_1)/6\right) - 2e^{t_1} \approx -1,7 \text{ Н}. \tag{1.6}$$

Работу силы определим с помощью теоремы об изменении кинетической энергии [см. (4)]:

$$A(t \in [t_2, t_1]) = T(t_2) - T(t_1). \tag{1.7}$$

Подстановка $t_1 = 1\,c$ и $t_2 = 5\,c$ в выражение (1.5) приводит к следующим значениям:

$$T(t_1) = 0,07 \text{ Дж}; \quad T(t_2) \approx 19,3 \text{ кДж}, \tag{1.8}$$

откуда значение работы силы $A(F_x) = T(t_2) - T(t_1) \approx 19,3$ кДж.

Вычисление импульса силы на заданном интервале времени $t \in [t_0, t]$ проведем с использованием общего выражения

$$\vec{S}(t) - \vec{S}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)dt. \tag{1.9}$$

В изучаемом примере (1.9) примет следующий вид:

$$S_x(t) - S_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} F_x(t)dt. \tag{1.10}$$

Подстановка выражения (1.4) с последующим интегрированием для интервала $t \in [t_2, t_3]$ приводит к следующему значению:

$$S_x(t_3) - S_x(t_2) = \int_5^7 \left(4 - \frac{\pi^2}{18}\sin\left((\pi t)/6\right) - 2e^t\right)dt =$$

$$= \left(4t + \frac{\pi}{3}\cos\left((\pi t)/6\right) - 2e^t\right)\Bigg|_5^7 = -1,89 \text{ кН} \cdot \text{с}. \tag{1.11}$$

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

ЗАДАЧА № 2

Точка M массы m движется по окружности радиуса R. Задан закон движения по окружности $s = s(t)$.

Найти:

1. Силу $\vec{F}(F^n, F^ф)$, вызывающую это движение и ее модуль $|\vec{F}|$.

2. Кинетическую энергию точки.

3. Вектор ускорения $\vec{a}(a^n,\ a^ф)$ и вектор силы инерции $\vec{\Phi}(\Phi^n, \Phi^ф)$ В момент времени $t = t^*$.

4. Работу силы $A_{1,2}(\vec{F})$ при $t \in [t_1,\ t_2]$.

Исходные данные приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Исходные данные

№ п/п	*m*, кг	*R*, м	*s* = *s*(*t*), м	t_1, с	t_2, с	*t**, с
1	5	5	$-1 + 2t^2 - 8t^3$	1,5	4	5
2	3	2	$6 + 3t^2 - 3t^3$	1	4,5	4,5
3	1	10	$9 + 5t + t^4$	1	6	3
4	3	8	$-8 + 5t$	2	5	4
5	3	9	$4 + t^3$	2	5	6
6	5	4	$-10 + 10t + 10t^4$	2	3	1
7	1	3	$-6 - 7t^2 + 8t^4$	2	3,5	5,5
8	5	4	$-6 + 6t^2$	2,5	3,5	5,5
9	3	6	$-7 - 7t^3 - 4t^4$	0,5	4,5	4
10	6	8	$-3 - 5t + 5t^4$	2	4,5	4,5
11	5	7	$7 + 4t - 10t^3$	1,5	3	3
12	2	5	$2t^2 - 2t^4$	2	3,5	1
13	3	10	$-7 + t^2 + t^4$	2	4	5,5
14	5	5	$2 + 9t^2$	0,5	5,5	6
15	3	5	$2 + 5t^2$	1,5	4,5	6
16	6	3	$3 + 13t^4$	0,5	4	4
17	1	8	$2 - 8t^4$	2	4	5
18	1	5	$7 - 4t + 9t^4$	0,5	4	2
19	5	8	$-5 - 2t^2$	1,5	5,5	6
20	3	3	$-6 - 4t^2 - 7t^3$	1	5	2
21	1	6	$-7 - 8t^2 + 10t^4$	1,5	3,5	6
22	3	5	$-5 + 2t^3 + 7t^4$	2	3	6

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Продолжение табл. 2.1

№ п/п	m, кг	R, м	$s = s(t)$, м	t_1, с	t_2, с	t^*, с
23	6	8	$-7+4t$	2,5	5	3
24	2	5	$3-5t^2-t^3$	2,5	3	2
25	2	4	$-2-14t^4$	2	3	5,5
26	5	4	$-10-10t-4t^2$	2	6	1
27	5	5	$5-3t^2+3t^4$	2	5,5	5
28	6	10	$-1+t^3-t^4$	1	3	2
29	6	4	$9t+t^4$	0,5	4,5	3
30	6	9	$1+2t^4$	1,5	5	3
31	1	4	$-6+9t^3-8t^4$	1	5	5,5
32	4	10	$3-t^3$	1,5	4	3
33	4	2	$8-8t-4t^2$	1,5	5	6
34	6	8	$4-5t+9t^2$	2	3,5	2
35	6	4	$7-6t-8t^2$	1,5	5,5	4
36	2	6	$4-9t-8t^4$	1,5	4,5	6
37	5	2	$10+4t-7t^4$	2	5	2
38	1	3	$-8+6t^3+10t^4$	2	5	5
39	4	5	$3+3t-8t^4$	2	5	5,5
40	5	3	$-4+6t+4t^2$	1,5	6	6
41	3	4	$7-10t-7t^4$	0,5	4,5	5
42	4	3	$-5+6t^2+8t^4$	1	4,5	5
43	4	10	$-4-10t+t^2$	2	4,5	4,5
44	5	3	$5+t+t^3$	1,5	5	6
45	4	4	$4+4t+3t^2$	2	5,5	5,5
46	6	8	$-8+9t$	1,5	5	4,5
47	3	6	$-5-3t^3+3t^4$	0,5	5	2
48	6	4	$-7+5t+6t^2$	1	6	5,5
49	4	5	$-6-6t^3+3t^4$	0,5	4,5	2
50	3	8	$7+5t+6t^4$	1	3	3
51	6	5	$-5+8t$	1,5	5	6
52	1	4	$-6-t^3+4t^2$	1,5	3	5
53	6	8	$-8-8t^3$	1,5	5,5	1
54	1	10	$-4+8t+7t^2$	2	5	4,5
55	4	6	$1+3t^2+8t^3$	1,5	3,5	6
56	5	2	$-2-4t-3t^4$	2,5	3,5	4,5
57	1	4	$-2-10t^2+2t^4$	2,5	5,5	5
58	6	7	$9+4t^2$	1	3,5	5

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Продолжение табл. 2.1

№ п/п	**m**, кг	**R**, м	**s = s(t)**, м	t_1, с	t_2, с	t^*, с
59	1	2	$-1+4t-3t^3$	1,5	3,5	4,5
60	5	8	$10t-6t^4$	2	3,5	6
61	4	7	$-1+2t^2-8t^3$	1,5	3,5	4
62	1	7	$6+3t^2-3t^3$	1,5	3	6
63	5	7	$9+5t+t^4$	1,5	4	5,5
64	6	7	$-8+5t$	0,5	5,5	6
65	6	2	$4+t^3$	2,5	4,5	6
66	5	8	$-10+10t+10t^4$	1	6	5
67	4	5	$-6-7t^2+8t^4$	2,5	3,5	6
68	6	7	$-6+6t^2$	0,5	3	3
69	2	5	$-7-7t^3-4t^4$	2	4,5	2
70	6	5	$-3-5t+5t^4$	1	4	2
71	4	8	$7+4t-10t^3$	1	5	5,5
72	5	6	$2t^2-2t^4$	0,5	6	5,5
73	2	10	$-7+t^2+t^4$	2,5	3,5	5,5
74	3	6	$2+9t^2$	1	3	2
75	4	8	$2+5t^2$	2,5	5	5,5
76	2	7	$3+13t^4$	1	4	6
77	3	4	$2-8t^4$	1	3,5	4,5
78	4	10	$7-4t+9t^4$	0,5	4	4,5
79	4	3	$-5-2t^2$	1,5	5	4
80	5	5	$-6-4t^2-7t^3$	0,5	6	4,5
81	1	3	$-7-8t^2+10t^4$	1,5	6	4
82	6	4	$-5+2t^3+7t^4$	2	4,5	5
83	5	9	$-7+4t+t^2$	1,5	4	3
84	3	8	$3-5t^2-t^3$	2	3	4
85	2	7	$-2-14t^4$	2,5	5	3
86	6	9	$-10-10t-4t^2$	0,5	6	5,5
87	6	5	$5-3t^2+3t^4$	2	5	6
88	3	10	$-1+t^3-t^4$	0,5	5,5	5
89	6	8	$4+9t+t^4$	1,5	6	6
90	4	6	$1+2t^4$	0,5	3,5	6
91	3	4	$-6+9t^3-8t^4$	0,5	3	4,5
92	5	9	$3+2t-t^3$	1,5	6	4,5
93	1	4	$8-8t-4t^2$	2,5	3	2
94	1	10	$4-5t+9t^2$	1	3	2

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

№ п/п	*m*, кг	*R*, м	*s* = *s*(*t*), м	t_1, с	t_2, с	t^*, с
95	6	9	$7-6t-8t^2$	1,5	6	5
96	4	5	$4-9t-8t^4$	2,5	6	4
97	5	3	$10+4t-7t^4$	2,5	3	2
98	5	2	$-8+6t^3+10t^4$	1	4	3
99	6	10	$3+3t-8t^4$	1,5	4,5	4
100	4	10	$-4+6t+4t^2$	2,5	6	5

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: $s(t)=2+4t+3t^3$; $m=4$ кг; $R=10$ м; $t_1=2$ с; $t_2=4$ с; $t^*=1$ с.

Определим скорость точки как функцию времени:

$$v(t)=\dot{s}(t)=\frac{d}{dt}\left(2+4t+3t^3\right)=4+9t^2. \tag{2.1}$$

Ускорение точки определим через нормальную a^n и тангенциальную $a^ф$ составляющие:

$$a^n(t)=\frac{v^2(t)}{R}=\frac{\left(4+9t^2\right)^2}{10}=8{,}1t^4+7{,}2t^2+1{,}6; \tag{2.2}$$

$$a^ф(t)=\ddot{s}(t)=\frac{d^2}{dt^2}\left(2+4t+3t^3\right)=18t. \tag{2.3}$$

Использование второго закона Ньютона (1) приводит к выражению для нормальной и тангенциальной компонент силы:

$$F^n=ma^n=32{,}4t^4+28{,}8t^2+6{,}4; \tag{2.4}$$

$$F^ф=ma^ф=72t. \tag{2.5}$$

Модуль силы определим из выражения

$$|\vec{F}|=\sqrt{\left(F^n\right)^2+\left(F^\tau\right)^2}, \tag{2.6}$$

откуда после некоторых упрощений из (2.4), (2.5) и (2.6) получаем

$$|\vec{F}|=\sqrt{5184t^2+0{,}16\left(4+9t^2\right)^4}. \tag{2.7}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Выражение для кинетической энергии точки $T = m\vec{v}^2/2$ с учетом (2.1) примет следующий вид:

$$T = \frac{m\dot{s}^2(t)}{2} = 2(4+9t^2)^2. \tag{2.8}$$

Определим значение модуля ускорения, модуля силы и модуля силы инерции $|\vec{\Phi}|$ в момент времени $t^* = 1$ с. Подстановка t^* в выражения (2.2), (2.3) приводит к следующим значениям:

$$a^n(t^*) = \frac{\left(4+9t^{*2}\right)^2}{10} = 16{,}9 \text{ м/с}^2; \;\; a^\text{ф}(t^*) = 18t^* = 18 \text{ м/с}^2; \tag{2.9}$$

$$|\vec{F}^n| = |\vec{\Phi}^n| = ma^n(t^*) = 67{,}6 \text{ Н}; \;\; |\vec{F}^\text{ф}| = |\vec{\Phi}^\text{ф}| = ma^\text{ф}(t^*) = 72 \text{ Н}, \tag{2.10}$$

откуда

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(a^n\right)^2 + \left(a^\text{ф}\right)^2} \approx 24{,}71 \text{ м/с}^2; \;\; |\vec{\Phi}| = \sqrt{\left(\Phi^n\right)^2 + \left(\Phi^\text{ф}\right)^2} \approx 98{,}9 \text{ Н}. \tag{2.11}$$

Работу силы определим с использованием теоремы об изменении кинетической энергии точки (2). Расчет с использованием (2.8) приводит к следующим значениям:

$$T(t_1) = 3{,}2 \text{ кДж}; \;\; T(t_2) = 43{,}8 \text{ кДж};$$

$$A_{1,2}(\vec{F}) = T(t_2) - T(t_1) = 4{,}06 \text{ кДж}. \tag{2.12}$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

ЗАДАЧА № 3

Механическая система состоит из двух точек массы m_1 и m_2. Известны уравнения движения этих точек на плоскости XOY:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t),\ y_1 = y_1(t); \\ x_2 = x_2(t),\ y_2 = y_2(t). \end{cases}$$

Найти:

1. Скорость и ускорение центра масс системы.
2. Главный вектор внешних сил, вызывающих это движение.
3. Кинетическую энергию механической системы как функцию времени.

Исходные данные приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Исходные данные

№ п/п	m_1, кг	m_2, кг	$x_1(t)$, м	$y_1(t)$, м	$x_2(t)$, м	$y_2(t)$, м
1	0,5	1	$6t^3$	$4t^2$	$e^{3t}+t$	$5t^2+4$
2	0,5	2,5	$-5t$	$-2t^3$	$6t+t^2$	$\sin((pt)/4)$
3	2	1	$\sin((pt)/3)$	$4-5t$	$3t^3-2$	$2t^2$
4	1	0,5	$e^{2t}+t^2$	$3t^3$	$-3t^3$	$e^{2t}+3t^2$
5	2	1,5	$10t^3$	$-3t$	$-2t-3$	$5t^3$
6	3	1	$2t^3+2t$	$9t^3$	$\sin((pt)/4)$	$-t^2$
7	1	3,5	$10t^3$	$7t+8e^t$	$6t^3$	$8e^t+t^2$
8	2,5	3	$e^{2t}+2t^3$	$4t^3$	$8t^2$	$6t^3+2$
9	1,5	2	$3-4t^2$	$-5t^3$	$3t+e^{t-2}$	$7t+t^3$
10	3	3,5	$8t^3-t^2$	$\sin((pt)/4)$	$-e^t+3t$	$\sin((pt)/2)$
11	0,5	2	$e^{4t}+8t^2$	$e^{3t}+4$	$2-t^3$	t^4+3
12	2,5	1	$5t^2$	$2t^3$	$e^{2-t}+4t^2$	$e^{3t}-t^2$
13	0,5	2,5	$e^{3t}-3t^2$	$e^{2t}-3t$	t^2+3	$24t^2$
14	3	2	$2t^2$	$-t^3$	$10t-2t^2$	$4-2t^3$
15	1	0,5	$-3t$	$9t^2$	$-2t^3+3$	$6t^3$
16	0,5	1,5	$10t^2$	$e^{2t}+3t$	$7t^3$	$-5t$
17	3,5	1	$e^{2t}-2t$	$8t^3$	$9t^2+8t$	$-2t+5e^t$
18	2,5	1	$4t^2-5$	$5t^2$	$\cos((pt)/3)$	$e^{2t}+t^2$
19	3	3,5	$2t-t^2$	$\cos((pt)/2)$	$\sin((pt)/4)$	$5t+t^2$
20	0,5	1,5	t^2+4t	$10t-e^{t-3}$	$2-4t^3$	$4-4t$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Продолжение табл. 3.1

№ п/п	m_1, кг	m_2, кг	$x_1(t)$, м	$y_1(t)$, м	$x_2(t)$, м	$y_2(t)$, м
21	1	1,5	$e^{2t}-2t^2$	$3t+e^{5t}$	$e^{2t}+3t$	$2t^3$
22	2,5	1,5	$10t^2$	$9t+t^3$	$\cos((\mathrm{p}t)/3)$	$10t^2+5$
23	2,5	2	$\sin((\mathrm{p}t)/2)$	$20t^3+t$	$10t^3$	$-5t^2+e^{3+t}$
24	0,5	2,5	$-5t^3+2$	$4t+e^{3t}$	$\sin((\mathrm{p}t)/2)$	$e^{2t}+5t$
25	3	1,5	$-2t$	$2t+3t^2$	$t+e^{5-t}$	t^3-5t
26	1	3,5	$7t-5t^3$	$-2t^3-e^t$	$\cos(\mathrm{p}t)-3t$	$\cos((\mathrm{p}t)/4)$
27	2	3	$e^{2t}-4t$	$7-t^3$	$9t^3$	$\cos((\mathrm{p}t)/4)$
28	1	3,5	$-3t^3-4t$	$2t-e^{2-t}$	$7t+8e^t$	$e^{2t}-4$
29	2,5	2	$e^{4t}+t$	$\sin((\mathrm{p}t)/4)$	$4t^3$	$\sin((\mathrm{p}t)/2)$
30	1,5	2	$\cos((\mathrm{p}t)/3)$	$3t^3$	$-5t^3$	$e^{2t}-3t^2$
31	3	2	$7t^2+5t$	$e^{5-t}+4t$	$\sin((\mathrm{p}t)/4)$	$2t^3+3$
32	2,5	2	$3t^3$	$10t^2+t$	$6t+t^2$	$\sin((\mathrm{p}t)/4)$
33	1,5	0,5	$9t^3-4$	$\cos((\mathrm{p}t)/3)$	$\cos((\mathrm{p}t)/4)$	$-2t$
34	3	0,5	$-4t+12$	$-4t^3$	$4-5t^2$	$e^{2t}+9t^3$
35	1	3,5	$e^{2t}+3t$	$2t^3$	$-2t-3$	$5t^3$
36	2	0,5	$e^{4t}+10t^2$	$10t^2+5$	$\cos((\mathrm{p}t)/4)$	$5t-t^2$
37	3	3	$10t^3$	$-5t^2+e^{3+t}$	$6t^3$	$8e^t+t^2$
38	3	2	$\cos((\mathrm{p}t)/4)$	$e^{2t}+5t$	$8t^2+5t$	$6t^3+2$
39	3,5	1,5	$t+e^{5-t}$	$-5t$	$3t^2+e^{t-2}$	$7t^2+t$
40	2,5	2,5	$e^{3t}+t$	$5t^3+4$	$3t^3+e^t$	$5t^3$
41	3	2	$6t+t^2$	$\sin((\mathrm{p}t)/4)$	$2t^3-4$	$3t^3-t$
42	1,5	3	$\cos((\mathrm{p}t)/4)$	e^t-2t	$-5t^2$	$9t-3t^3$
43	1,5	2,5	$-3t^3$	$e^{2t}+9t^3$	$\sin((\mathrm{p}t)/3)$	$12t^3$
44	1,5	1	$-2t-3$	$5t^3$	$\cos((\mathrm{p}t)/2)$	t^3-e^{t+3}
45	2	3	$\cos((\mathrm{p}t)/4)$	$-t^2$	$10t^3$	$-5t^2+5t^3$
46	3,5	3	$6t^3$	$8e^t+t^2$	$2t-t^3$	$5t+10t^3$
47	3,5	3,5	$8t^2$	$6t^3+2$	t^2-2t	$3t^3$
48	2,5	3	$9t+e^{t-2}$	$7t+t^3$	$8t^2$	$7t^2$
49	0,5	3	$-e^t+5$	$\sin((\mathrm{p}t)/2)$	$3t^3-t$	$e^{t-3}-6t$
50	1	3,5	$5t^3-3t$	$4t^3$	$3t^2$	$-t-5t^2$
51	3	2	$8t^3$	$e^{2t}+2t^3$	$\sin((\mathrm{p}t)/4)$	$7t^2+2t^3$
52	1	2	$6t^2$	$3-4t^2$	$e^{3t}-t^3$	$5t+2t^3$
53	2	3	$e^{2t}+t^2$	$8t^3-t^2$	$-4t^2$	$-t-5t^3$
54	3,5	3	$6t-4t^3$	$e^{4t}+8t^2$	t^3-3t	$-2t^2-3t^3$
55	0,5	3	t^2+2	$5t^2$	$5t^3$	$7t-2t^2$

Продолжение табл. 3.1

№ п/п	m_1, кг	m_2, кг	$x_1(t)$, м	$y_1(t)$, м	$x_2(t)$, м	$y_2(t)$, м
56	1	1	$-3t^3-5$	$e^{3t}+t^2$	$e^{2t}+7t^2$	$-2t+t^2$
57	1,5	1	$e^{3t}+t^3$	$2t^2$	$8t^3$	$t-2t^3$
58	3	1	e^t+10t^2	$-3t$	$2t^2$	$-6t$
59	2,5	0,5	$\sin((pt)/3)$	$10t^2$	$-2t+t^3$	$9t+3t^2$
60	2	3,5	$7t-t^2$	$e^{2t}-2t$	t^3	$10t^2-3t^3$
61	1,5	3,5	$10t+8t^3$	$4t^2-5$	$e^{2t}+7t^3$	$10t^2+6t^3$
62	2,5	1,5	$2t$	$2t-t^2$	$3t^2$	$\cos((pt)/6)$
63	2	1	$e^{2t}+3$	t^2+12t	$8t^3$	$4t-3t^2$
64	3,5	0,5	$e^{3t}-t^2$	$e^{2t}-2t^2$	e^t+2t	$2t-3t^3$
65	3	1,5	$7t^2$	$10t^2$	$7t^3$	$8t+10t^3$
66	3,5	2,5	$-2t^3$	$\sin((pt)/6)$	t^2-e^t	$10t+5t^2$
67	1	1,5	$\cos((pt)/3)$	$-5t^3+2$	$7t^3$	$t-t^2$
68	0,5	1	$t-t^4$	$-2t$	$8t-5$	t^2+8t
69	3,5	2	$t+e^{3-t}$	$7t-5t^3$	$e^{2t}+2t$	$6t^2+5t^3$
70	2,5	1	$e^{3t}+2t$	$e^{2t}-4t$	$\sin((pt)/2)$	$3t-3t^3$
71	2	3	$7t-4t^2$	$-3t^3-7t$	$6t-7t^3$	$8t^2$
72	1	3	$10t^2$	$e^{4t}+t$	$12t^3$	$8t+t^2$
73	1,5	1	$e^{2t}-4$	$\cos((pt)/3)$	$e^{3t}-t^2$	$-5t^2-2t^3$
74	0,5	0,5	$\sin((pt)/2)$	$7t^2+5t$	$3t^2$	$7t^2+4t^3$
75	1,5	1	$e^{2t}-3t^2$	$3t^3$	$2t^2-5t$	$\sin(pt)-3t^2$
76	1	3	$2t^3+3$	$9t^3-4$	$e^{3t}+2t^2$	$12t^2$
77	0,5	1,5	$4t^3+8t$	$4-4t$	t^4+t	t^3+5t
78	2,5	2	$\sin((pt)/3)$	$e^{2t}+3t$	$-5t^2$	$-5t^2-2t^3$
79	2,5	2	$8t^3+6$	$e^{4t}+10t^2$	e^2-5t	$14t^3$
80	3,5	0,5	$\sin((pt)/2)$	$10t^3$	$8t^3$	$e^{t+3}-5t^3$
81	3	0,5	$e^{2t}-5t^2$	$\cos(pt)$	e^t+8t^2	$t-3t^3$
82	1,5	0,5	$-2t^2$	$t+e^{5-t}$	$e^{2t}+4t^3$	$12t^2$
83	2,5	2,5	$2t^3$	$e^{3t}+t$	t^3-2	$\sin((pt)/4)$
84	3	1,5	$9t^2-4$	$6t+t^2$	$9t^2+5t$	$6t+6t^3$
85	2,5	3	$\sin((pt)/3)$	$2t^3-5t$	$8t^2-3t$	$e^{t-3}-t^3$
86	0,5	2	$-t^2+9t$	$\sin((pt)/4)$	$5t+4e^t$	$12t^2-e^t$
87	3	1,5	$5t^2$	$e^{3t}-t^3$	$7t-7t^3$	$12t^2$
88	1,5	3,5	t^2-e^t	$5-4t^5$	$6t^2-3t$	$5t-3t^2$
89	3	1,5	$-3t+6e^t$	t^3-3t	$7t^3+t^3$	$-4t^2+10t^3$
90	1,5	1	$6t^2$	$5t^3$	$3t^3+e^t$	$5t^3$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

№ п/п	m_1, кг	m_2, кг	$x_1(t)$, м	$y_1(t)$, м	$x_2(t)$, м	$y_2(t)$, м
91	1,5	2,5	$-2t^2$	$e^{2t}+7t^2$	$3t-2t^4$	$e^{3t}+t$
92	0,5	0,5	e^{3t}	$8-5t^3$	$t+e^{3-t}$	$\sin((\mathrm{p}t)/2)$
93	2	1,5	$e^{2-t}+10t^2$	$2t^2$	$e^{3t}+2t$	$6t^3+5t$
94	0,5	0,5	$9t^2$	$-2t+t^3$	$7t-4t^2$	$8t^2-3t$
95	3	1	$10t-2t^2$	$4t-t^3$	$-t-5t^3$	$2t+e^{t-2}$
96	2,5	1,5	$-2t^3+3$	$e^{2t}+7t^3$	$-2t^2-3t^3$	$-e^t+3t$
97	1	3,5	$7t^3$	$3t^2+t$	$7t-2t^2$	$2-4t^3$
98	3,5	3,5	$9t^2+8t$	$8t^3-6t$	$-2t+t^2$	$e^{2-t}+3t^2$
99	3	0,5	$\cos(\mathrm{p}t)$	e^t+2t^{1-t}	$t-2t^3$	t^2+3/t
100	2,5	1,5	$\sin((\mathrm{p}t)/4)$	$5/t^3+4$	$3t^3-6t$	$\sin((\mathrm{p}t)/2)$

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 3$ кг; $x_1(t) = 4t^2 + 3$ м; $y_1(t) = 6e^t + t$ м; $x_2(t) = \sin((\mathrm{p}t)/3)$ м; $y_1(t) = 3\cos((\mathrm{p}t)/4) + 4$ м.

Координаты центра масс системы определим с использованием выражения

$$\vec{r}^{\,\text{ц.м}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \vec{r}_3 m_3 + \ldots + \vec{r}_n m_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} \qquad (3.1)$$

или в проекциях на оси координат:

$$x^{\text{ц.м}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}; \quad y^{\text{ц.м}} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (3.2)$$

В изучаемом примере координаты центра масс системы являются функциями времени. Используя (3.2), получаем:

$$\begin{aligned} x^{\text{ц.м}}(t) &= \frac{x_1(t)\, m_1 + x_2(t)\, m_2}{m_1 + m_2} = t^2 + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\mathrm{p}t}{3}\right) + \frac{3}{4}; \\ y^{\text{ц.м}}(t) &= \frac{y_1(t)\, m_1 + y_2(t)\, m_2}{m_1 + m_2} = \frac{t}{4} + \frac{3e^t}{2} + \frac{9}{4}\cos\left(\frac{\mathrm{p}t}{4}\right) + 3. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Определим скорость центра масс. Вычисление производных выражений (3.3) приводит к следующему:

$$v_x^{\text{ц.м}}(t) = \frac{dx^{\text{ц.м}}(t)}{dt} = 2t + \frac{p}{4}\cos\left(\frac{pt}{3}\right); \tag{3.4}$$

$$v_y^{\text{ц.м}}(t) = \frac{dy^{\text{ц.м}}(t)}{dt} = \frac{3e^t}{2} - \frac{9p}{16}\sin\left(\frac{pt}{4}\right) + \frac{1}{4}, \tag{3.5}$$

откуда с учетом (3.4) и (3.5):

$$\left|\vec{v}(t)\right|^{\text{ц.м}} = \sqrt{\left(v_x^{\text{ц.м}}(t)\right)^2 + \left(v_y^{\text{ц.м}}(t)\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(2t + \frac{p}{4}\cos\left(\frac{pt}{3}\right)\right)^2 + \left(\frac{3e^t}{2} - \frac{9p}{16}\sin\left(\frac{pt}{4}\right) + \frac{1}{4}\right)^2}. \tag{3.6}$$

Ускорение центра масс системы определим аналогично:

$$a_x^{\text{ц.м}}(t) = \frac{d^2x^{\text{ц.м}}(t)}{dt^2} = 2 - \frac{p^2}{12}\sin\left(\frac{pt}{3}\right); \tag{3.7}$$

$$a_y^{\text{ц.м}}(t) = \frac{d^2y^{\text{ц.м}}(t)}{dt^2} = \frac{3e^t}{2} - \frac{9p^2}{64}\cos\left(\frac{pt}{4}\right), \tag{3.8}$$

откуда

$$\left|\vec{a}(t)\right|^{\text{ц.м}} = \sqrt{\left(a_x^{\text{ц.м}}(t)\right)^2 + \left(a_y^{\text{ц.м}}(t)\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(2 - \frac{p^2}{12}\sin\left(\frac{pt}{3}\right)\right)^2 + \left(\frac{3e^t}{2} - \frac{9p^2}{64}\cos\left(\frac{pt}{4}\right)\right)^2}. \tag{3.9}$$

Использование второго закона Ньютона (1) приводит к выражениям для компонент главного вектора сил, вызывающего движение системы точек массы $M = m_1 + m_2$:

$$F_x^{\text{гл}}(t) = M\ a_x^{\text{цм}}(t) = 8 - \frac{p^2}{3}\sin\left(\frac{pt}{3}\right); \tag{3.10}$$

$$F_y^{\text{гл}}(t) = M\ a_y^{\text{цм}}(t) = 6e^t - \frac{9p^2}{16}\cos\left(\frac{pt}{4}\right), \tag{3.11}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

а также модуля силы:

$$\left|\vec{F}\right|^{\text{гл}} = \sqrt{\left(F_x^{\text{гл}}(t)\right)^2 + \left(F_y^{\text{гл}}(t)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(8 - \frac{\mathrm{p}^2}{3}\sin\left(\frac{\mathrm{p}t}{3}\right)\right)^2 + \left(6e^t - \frac{9\mathrm{p}^2}{16}\cos\left(\frac{\mathrm{p}t}{4}\right)\right)^2}. \qquad (3.12)$$

Кинетическую энергию системы двух точек определим из выражения:

$$T = T_1 + T_2, \qquad (3.13)$$

где

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2(t) + \dot{y}_1^2(t)\right); \\ T_2 = \dfrac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2(t) + \dot{y}_2^2(t)\right). \end{cases} \qquad (3.14)$$

Вычисление производных приводит к следующему:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{d}{dt}(4t^2 + 3) = 8t, \quad \dot{y}_1(t) = \frac{d}{dt}(6e^t + t) = 6e^t + 1;$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{d}{dt}(\sin((\mathrm{p}t)/3)) = \frac{\mathrm{p}}{3}\cos((\mathrm{p}t)/3);$$

$$\dot{y}_2(t) = \frac{d}{dt}(3\cos((\mathrm{p}t)/4)+4) = -\frac{3\mathrm{p}}{4}\sin((\mathrm{p}t)/4). \qquad (3.15)$$

Подстановка (3.15) в (3.14) приводит к окончательному выражению для кинетической энергии системы как функции времени:

$$T = T_1 + T_2 =$$

$$= \frac{1}{96}\big(16\mathrm{p}^2\cos^2((\mathrm{p}t)/3) + 81\mathrm{p}^2\sin^2((\mathrm{p}t)/4) +$$

$$+ 1728e^{2t} + 576e^t + 3072t^2 + 48\big). \qquad (3.16)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

ЗАДАЧА № 4

Точка массы m движется в трехмерном пространстве $OXYZ$. Уравнение движения точки заданы функциями $x(t)$; $y(t)$ и $z(t)$.

Найти:

1. Все кинематические параметры движения точки $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$; $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{a}(a^{\phi}, a^n)$ при $t = t_1$.

2. Компоненты силы $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$, вызывающей это движение.

3. Кинетическую энергию точки в момент времени $t = t_2$.

4. Работу силы на интервале времени $t \in [t_1, t_2]$.

Исходные данные приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Исходные данные

№ п/п	m, кг	$x(t)$, м	$y(t)$, м	$z(t)$, м	t_1, с	t_2, с
1	4	$5e^{2t}+5t$	$-3t^3+2t$	$3-5t^2$	0,2	5
2	2	$4e^t-2t$	$5\cos((\text{p}t)/4)$	$5\sin((\text{p}t)/4)$	1	3,5
3	3	$5e^{2t}-2t^3$	$7t-5+7t^3$	$6+e^t$	0,2	2
4	1,5	$4t^2-4t+3$	$3t^2-5t$	$-3\sin((\text{p}t)/3)$	1,5	5
5	3,5	$2\sin((\text{p}t)/3)$	t^3-2+5t^2	$e^{3+t}+3t$	2	3
6	1	$3e^t+6t^2$	$6t^2$	$4\sin((\text{p}t)/2)$	0,5	2,5
7	2	$4\cos((\text{p}t)/2)$	$6e^{3t}+7t$	$-2t+8e^t$	1,5	4,5
8	3,5	$e^{t+3}-2t^2$	$4/t-2t^2$	$5-3t+8t^2$	2	3
9	3	$5e^{3t}-5t$	$-3e^{3t}-2t$	$2\sin((\text{p}t)/3)$	1,5	3
10	4,5	$7e^t+t$	$7-2e^t$	$-2+t^2-t$	1	4,5
11	2	$5t+7t^2$	$\sin((\text{p}t)/3)$	$5t^2$	0	4
12	4,5	$-2e^t-2t$	$-e^{3t}+8t$	$-4t^3+t$	1,5	4,5
13	0,5	$-5t^3+4t^2$	$-2\sin((\text{p}t)/4)$	$5\sin((\text{p}t)/2)$	1,5	4
14	4,5	$5e^{2t}-2t$	$2t-t^2$	$8t+3t^2$	0	3
15	2	$3t+t^2$	$2\sin((\text{p}t)/2)$	$5\sin((\text{p}t)/2)$	0	3,5
16	3,5	$2\cos((\text{p}t)/2)$	e^t+3t	$6\sin((\text{p}t)/4)$	2	2,5
17	2	$-2\sin((\text{p}t)/4)$	$-5e^{2t}-2t^2$	$2\cos((\text{p}t)/3)$	1,5	5
18	4,5	$5\sin((\text{p}t)/3)$	$-\cos((\text{p}t)/2)$	$6t-t^3$	0,2	3
19	0,5	$6t^2+3t$	t^3-t+3	$\cos((\text{p}t)/2)$	2	3,5
20	3	$-2\cos((\text{p}t)/3)$	$-3e^{3t}+t$	$3t^3+2t$	2	4,5
21	4,5	$-2e^t+7t^3$	$7\cos((\text{p}t)/2)$	$2e^{2t}-5t$	1	3,5

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Продолжение табл. 4.1

№ п/п	*m*, кг	*x*(*t*), м	*y*(*t*), м	*z*(*t*), м	t_1, с	t_2, с
22	4	$-3\cos((\mathrm{p}t)/2)$	$-1+3t+t^4$	$2e^t-5t$	1,5	4,5
23	2,5	$2\cos((\mathrm{p}t)/2)$	$5+4e^t$	$3\cos((\mathrm{p}t)/4)$	1	5
24	4	$e^{2t}-7t^2+3t$	$8\cos((\mathrm{p}t)/4)$	$5\sin((\mathrm{p}t)/3)$	0,5	3,5
25	5	$5\cos((\mathrm{p}t)/3)$	$7t+5t^2$	$-2+8t^3$	0,2	3
26	0,5	$-2t+2/t$	$2e^{3t}+6t^2$	$8\cos((\mathrm{p}t)/3)$	0,5	2,5
27	5	$4\cos((\mathrm{p}t)/4)$	$5e^{3t}-3t^2$	$2+8t^2$	0	4
28	5	$2\sin((\mathrm{p}t)/4)$	$-4e^{2+t}+t^3$	$5\sin((\mathrm{p}t)/3)$	0,5	4
29	2	$7e^{3t}+5t^2$	$4\sin((\mathrm{p}t)/3)$	$5\cos((\mathrm{p}t)/2)$	0	3,5
30	5	$6e^{2t}+4t$	$-3t^2-3t$	$8t+t^2$	1,5	3,5
31	5	$2e^{3t}+8t^2$	$2\cos((\mathrm{p}t)/3)$	$-4\sin((\mathrm{p}t)/2)$	0,2	4,5
32	0,5	$-3\sin((\mathrm{p}t)/2)$	$3+5t^2$	$5\sin((\mathrm{p}t)/3)$	0,5	3,5
33	3,5	$8\sin((\mathrm{p}t)/2)$	$-2+2e^{(3t)}$	$\cos((\mathrm{p}t)/2)$	0,2	5
34	0,5	$4e^t+5t^2$	$7t^2+4t$	$7e^{4-t}+6t$	0,4	2,5
35	2,5	$2\cos((\mathrm{p}t)/3)$	$4+3e^{2t}$	$7t^2+5t$	0,2	2,5
36	4,5	$-t^3+t$	$1+7e^{2t}+t$	$7\sin((\mathrm{p}t)/4)$	1	5
37	4	$6e^{2t}-1$	$8+5e^{3t}$	$3\cos((\mathrm{p}t)/4)$	2	2,5
38	2,5	$6e^{2t}+7t$	$3\cos((\mathrm{p}t)/2)$	$4e^{2+t}+5t$	1	3,5
39	5	$5t^2+t^3$	$4\cos((\mathrm{p}t)/3)$	$-5\cos((\mathrm{p}t)/3)$	0,2	4
40	3,5	$-4\sin((\mathrm{p}t)/4)$	$3t^2+6t-4$	$3\sin((\mathrm{p}t)/3)$	1	3
41	0,5	$-5t+3t^3$	$7\sin((\mathrm{p}t)/3)$	$8\cos((\mathrm{p}t)/4)$	2	2,5
42	1	e^t+5t-4	$3\cos((\mathrm{p}t)/3)$	$4e^{3t}+2t$	1,5	3,5
43	0,5	$2e^t+3/t$	$8\sin((\mathrm{p}t)/2)$	$1-4t^2$	1	3
44	0,5	$\sin((\mathrm{p}t)/2)$	$3e^t-4t^3$	$2t-5e^{3-t}$	0,5	2,5
45	1,5	$-4e^t-2t$	$5\sin((\mathrm{p}t)/4)$	$6\cos((\mathrm{p}t)/4)$	2	5
46	4	$2\cos((\mathrm{p}t)/2))$	$2e^{3t}+t$	$1+5t$	2	3
47	0,5	$7t^3+6t^2$	$7e^t+t$	$3t^3-2t$	0,5	4
48	1,5	$7t+2t^4$	$4\sin((\mathrm{p}t)/4)$	$-1+2t^2$	2	3,5
49	0,5	$3e^t-t$	$\sin((\mathrm{p}t)/3)$	$-3\sin((\mathrm{p}t)/2)$	2	2
50	2	$e^{3t}+7t^2-2t$	$4+4t$	$2t^2-3t$	0,5	3,5
51	3,5	$-4\cos((\mathrm{p}t)/2)$	$8\sin((\mathrm{p}t)/4)$	$2\cos((\mathrm{p}t)/4)$	0,2	2
52	1,5	$2t^2+4/t^2$	$-2e^{2t}+3t$	$3\sin((\mathrm{p}t)/3)$	0,5	2
53	4,5	$5\cos((\mathrm{p}t)/3)$	$-5\cos((\mathrm{p}t)/4)$	$3+3t-t^2$	0	4
54	2,5	$-3t^3+2t-t$	$\cos((\mathrm{p}t)/3)$	$-3\cos((\mathrm{p}t)/2)$	2	2,5
55	3	$7t^2+t-7$	$5\cos((\mathrm{p}t)/2)$	$-\cos((\mathrm{p}t)/3)$	2	3,5
56	3,5	$e^{4t}-t^2+5$	$5e^{4-t}+2t^3$	$-2+5t^2+t^4$	1	4

Продолжение табл. 4.1

№ п/п	*m*, кг	*x*(*t*), м	*y*(*t*), м	*z*(*t*), м	t_1, с	t_2, с
57	1,5	$5e^{3t}-t^2$	$3+8e^{3t}$	$3+4t-8t^2$	1,5	4,5
58	2	$7e^{t}+4t^2$	$3\sin((pt)/2)$	$-\sin((pt)/2)$	0,5	3,5
59	3	$e^{2+t}-t$	$-2\cos((\pi t)/4)$	$2t^2+5/t$	0,5	3
60	0,5	$\cos((pt)/3)$	$5\sin((pt)/4)$	$2\cos((pt)/4)$	2	2,5
61	1,5	$4e^{3+t}-t$	$4e^{t}+2t^3$	$2+t-3t^2$	1,5	3,5
62	0,5	$7e^{t}+6t^2$	$7e^{t}+t^3$	$4\sin((pt)/3)$	1	2
63	2,5	$5e^{2t}+6t$	$3\sin((pt)/4)$	$2\sin((pt)/2)$	1,5	2,5
64	3	$6\sin((pt)/2)$	$6t^4+4t$	$-2e^{3t}+4t$	1,5	3
65	5	$7e^{t}+1/t$	$3\sin((pt)/4)$	$4t^2+3e^{t}$	1,5	3,5
66	3	$2e^{2t}+1$	$-\sin((pt)/3)$	t^2-3e^{2t}	0,5	2
67	2	$5\sin((pt)/2)$	$6\cos((pt)/4)$	$-2\sin((pt)/4)$	1,5	4
68	2	$4e^{t}-2t^2$	$-2\sin((pt)/4)$	t^3-2t^2+5	0,2	5
69	1	$5e^{2t}-2t^3$	$\cos((pt)/3)$	$e^{2+t}+3t$	0,2	5
70	2,5	$-4\sin((pt)/2)$	$4\sin((pt)/4)$	$3\sin((pt)/3)$	1	2
71	2,5	$-2\sin((pt)/3)$	$4t-4e^{4t}$	$-2-3t^3$	1	4,5
72	4	$3e^{t}+6t^3$	$6-5/t^2$	$2\sin((pt)/4)$	1	2
73	0,5	$4\cos((pt)/2)$	$5e^{t}+t^3$	$-2t^3+7t^2$	0,2	2,5
74	3,5	$2\cos((pt)/4)$	$e^{2t}-3t$	$6\sin((pt)/2)$	2	4
75	3	$-5\sin((pt)/4)$	$7t^3+5t^2$	$4e^{2t}+7t^2$	0,5	5
76	5	$7e^{t}+t^{t-1}$	$4\cos((pt)/4)$	$-3t+6/t^2$	1,5	2,5
77	1	$5t+7/t$	$-2t-t^2$	t^3-5t^2	1,5	2,5
78	5	$2\cos((pt)/3)$	$4\cos((pt)/2)$	$2t^4$	0,7	4,5
79	0,5	$-5t^3+4t^2$	$2t+8e^{t}$	$4t+2e^{t}$	0	2,5
80	3	$5e^{2t}-2t$	$5t+4t^3$	$4t^2-e^{2-t}$	0	2,5
81	2	t^3+5t	$4e^{1+t}+8t$	$3t^2+5t^4$	2	5
82	1	$-3-4t^3$	$2\sin((pt)/2)$	$5t-2e^{2t}$	1	3
83	1	$-2\cos((pt)/4)$	$3-2e^{3t}$	$2\cos((pt)/4)$	0,3	2,5
84	3,5	$5e^{2-t}+3t$	$e^{2-t}-2t^2$	$2\sin((pt)/6)$	0,5	4
85	1	$5e^{t}$	$2\cos((pt)/2)$	$-7\cos((pt)/2)$	1	4
86	3	$e^{-3t}+7t^2$	$3e^{3t}-3t^4-5$	$-3\sin((pt)/3)$	1	5
87	4,5	$2\sin((pt)/2)$	$4\cos((\pi t)/4)$	$-t^3+5e^{1-t}$	1,5	2,5
88	4,5	$4\cos((pt)/4)$	$4\sin((pt)/3)$	$4e^{5t}-6t^2$	0,2	5
89	3,5	$3\sin((pt)/2)$	$3e^{(3t)}+t^3$	t^4-t^3+5t	0	3,5
90	1,5	$2\sin((pt)/3)$	$4+4e^{2-t}$	$3\sin((pt)/2)$	0,5	3
91	3,5	$6t+2/t$	$-3t+5t^2$	$\sin((pt)/3)$	2	4,5

Окончание табл. 4.1

№ п/п	m, кг	$x(t)$, м	$y(t)$, м	$z(t)$, м	t_1, с	t_2, с
92	1,5	$5+3t-2t^3$	$-3\cos((pt)/3)$	$2t^2-7t+4$	0,2	3,5
93	3,5	$3+2t^2-e^{t-1}$	$7\cos((pt)/4)$	$2\sin((pt)/4)$	0	2
94	3	$5+4e^t$	$3-e^{3t}+1/t$	$3\sin((pt)/2)$	1	4
95	3	$-\cos((pt)/4)$	$4\cos((pt)/3)$	$-4t+8t^2-10/t$	1,5	3
96	2	$2\cos((pt)/3)$	$\cos((pt)/3)$	$-3e^{2t}+7t-1$	2	5
97	4	$2\cos((pt)/3)$	$3-2t^4+6t^2$	$3t^4+5t^3-7t$	0	3,5
98	3,5	$8t+t^3$	$-3t^2+7t-1$	$1+4e^{2+t}+2t^4$	1	3,5
99	1	$5-4t^3$	$2-3t-2t^4$	$-2t-e^{3t}+3t^4$	0,5	3,5
100	2	$3t^2-4t$	$e^{2t}+5t^3$	$2\sin((pt)/2)$	1,5	2

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: $m=0,5$ кг; $x(t)=3t+2t^4$; $y(t)=-2e^t+3t^2$ м; $z(t)=4\sin((pt)/4)$ м; $t_1=1$ с; $t_2=3$ с.

Определим компоненты вектора скорости точки как функцию времени:

$$v_x(t)=\dot{x}(t)=\frac{d}{dt}\left(3t+2t^4\right)=3+8t^3;$$

$$v_y(t)=\dot{y}(t)=\frac{d}{dt}\left(-2e^t+3t^2\right)=-2e^t+6t;$$

$$v_z(t)=\dot{z}(t)=\frac{d}{dt}\left(4\sin((pt)/4)\right)=p\cos((pt)/4). \qquad (4.1)$$

Компоненты вектора ускорения точки определим аналогично:

$$a_x(t)=\dot{v}_x(t)=\frac{d}{dt}\left(3+8t^3\right)=24t;$$

$$a_y(t)=\dot{v}_y(t)=\frac{d}{dt}\left(-2e^t+6t\right)=-2e^t+6;$$

$$a_z(t)=\dot{v}_z(t)=\frac{d}{dt}\left(p\cos((pt)/4)\right)=-\frac{p^2}{4}\sin((pt)/4). \qquad (4.2)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

В момент времени $t_1 = 1$ с с учетом (4.1) и (4.2) определим значения компонент $v_x(t)$; $v_y(t)$; $v_z(t)$ скорости совместно с его модулем:

$$v_x(t_1) = 11 \text{ м/с}; \; v_y(t) = 0{,}56 \text{ м/с}; \; v_z(t_1) = 2{,}22 \text{ м/с};$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)} \approx 11{,}24 \text{ м/с}. \qquad (4.3)$$

Для ускорения точки аналогично:

$$a_x(t_1) = 24 \text{ м/с}^2; \; a_y(t) = 0{,}56 \text{ м/с}^2; \; a_z(t_1) = -1{,}74 \text{ м/с}^2;$$

$$a_z(t_1) = -1{,}74 \text{ м/с}^2;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)} \approx 24{,}07 \text{ м/с}^2. \qquad (4.4)$$

Нормальную и тангенциальную компоненты ускорения определим с использованием значений (4.3) и (4.4); расчет выражения

$$a^{\text{ф}} = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{|\vec{v}|} \qquad (4.5)$$

приводит к значению $a^{\text{ф}} \approx 23{,}18$ м/с^2. Нормальное ускорение определим из

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(a^{\text{ф}}\right)^2 + \left(a^n\right)^2}, \qquad (4.6)$$

откуда

$$a^n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - \left(a^{\text{ф}}\right)^2} \approx 6{,}49 \text{ м/с}^2.$$

Для определения компонент сил $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ воспользуемся вторым законом Ньютона (1). С учетом (4.2) получаем:

$$F_x(t) = ma_x(t) = 12t^2; \; F_y(t) = ma_y(t) = -e^t + 3;$$

$$F_z(t) = -\frac{\text{p}^2}{8}\sin((\text{p}t)/4). \qquad (4.7)$$

Кинетическую энергию точки $T = m\vec{v}^2/2$ в момент $t_2 = 3\,c$ определим с использованием выражений (4.1). Расчет в указанный момент времени приводит к следующим значениям:

$$v_x(t_2) = 219 \text{ м/с}; \; v_y(t_2) = -22{,}17 \text{ м/с}; \; v_z(t_2) = -2{,}21 \text{ м/с}. \qquad (4.8)$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Подстановка (4.8) в выражение кинетической энергии точки

$$T = \frac{m}{2}\left(v_x^2(t_2) + v_y^2(t_2) + v_z^2(t_2)\right) \tag{4.9}$$

после некоторых вычислений приводит к значению $T \approx 12{,}1$ кДж.

Работу силы определим с использованием теоремы об изменении кинетической энергии (см. (4)). Подстановка $t_1 = 1\ c$ и $t_2 = 3\ c$ в выражение (4.9) приводит к значению работы силы:

$$A = T(t_2) - T(t_1) = 12{,}1\ - 0{,}031\ \approx 12{,}07 \text{ кДж.} \tag{4.10}$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

ЗАДАЧА № 5

Точка M массы m движется вдоль прямой OX под действием силы $F_x(t)$. Заданы начальные условия: $v_x(0) = v_{0x}$; $x(0) = x_0$.

Найти:

1. Скорость $v_x(t)$, закон движения точки $x(t)$.
2. Кинетическую энергию точки.
3. Работу силы $A_{1,2}(F_x)$ при $t \in [t_1,\ t_2]$.
4. Импульс силы при $t \in [t_2,\ t_3]$.

Исходные данные приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Исходные данные

№ п/п	m, кг	$F_x(t)$, Н	t_1, с	t_2, с	t_3, с	Начальные условия	
						x_0, м	v_{0x}, м/с
1	0,2	$-3e^t + 6\sin((pt)/3)$	0,5	3	8,5	0	4
2	1	$10\sin((pt)/3)$	0	5	9	5	3
3	3,5	$3t + 5\sin((pt)/3)$	2	5	8	5	–1
4	3,5	$4e^t - 3\sin((pt)/3)$	2	3	8	7	–1
5	3,5	$5\cos((pt)/4) + 6t^3$	0	5,5	6,5	1	0
6	0,5	$9t^2 + 10\sin((pt)/3)$	1,5	6	8	–2	–5
7	3	$8e^{6t} - \sin((pt)/2)$	0,5	4,5	6,5	–4	0
8	2	$-4 - 2e^t + 10\sin((pt)/2)$	0,5	3,5	8,5	5	0
9	3	$10\cos((pt)/3)$	2	5,5	7	–4	–3
10	3,5	$2e^{3t-2} + t$	1,5	3,5	9	1	–3
11	1,5	$\sin((pt)/3)$	1	5	8	7	2
12	2	$2t^2 + 4\sin((pt)/3)$	1,5	6	7,5	5	–4
13	2	$9\sin((pt)/3)$	1,5	6	9,5	–1	4
14	2,5	$3t + \sin((pt)/3)$	1,5	3	9	8	–4
15	0,5	$7e^{2t} + 7\sin((pt)/2)$	0,5	3	8,5	–4	2
16	2	$-3e^t + 10\cos((pt)/4)$	1,5	5,5	9,5	8	0
17	2,5	$-4t^2 + 4\cos((pt)/3)$	0,2	3	10	–3	0
18	3	$8e^{2t} + \cos((pt)/4)$	0,2	4,5	6,5	8	–3
19	2	$9e^{3t} - 2\sin((pt)/2)$	1	4,5	7	8	4
20	3	$-e^{2t} - \cos((pt)/4)$	1	4	7,5	8	–4

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Продолжение табл. 5.1

№ п/п	m, кг	$F_x(t)$, Н	t_1, с	t_2, с	t_3, с	Начальные условия	
						x_0, м	v_{0x}, м/с
21	3	$3+10e^{2t}-2\cos((\mathrm{p}t)/4)$	1	4,5	8	1	4
22	2	$-6t+5\cos((\mathrm{p}t)/3)$	0,2	3,5	8	0	4
23	2,5	$-5+3\cos((\mathrm{p}t)/4)$	2	5	9	1	–4
24	3,5	$6t+3e^{t}$	0,5	6	7,5	0	4
25	1	$-5t+8\cos((\mathrm{p}t)/4)$	1,5	4,5	9	4	0
26	2,5	$6e^{t}-3\sin((\mathrm{p}t)/2)$	1,5	3,5	10	8	3
27	0,2	$-4e^{5t}+5\sin((\mathrm{p}t)/2)$	0,2	4,5	7,5	3	1
28	0,2	$5e^{t}+8t^{2}$	0	5	9	–4	2
29	2	$4-3e^{5t}-5\sin((\mathrm{p}t)/2)$	0	5,5	8,5	8	3
30	2	$7+3e^{t}+3\cos((\mathrm{p}t)/3)$	2	3,5	10	2	–3
31	1,5	$-3e^{t}-3\sin((\mathrm{p}t)/2)$	1	3	6,5	0	0
32	3,5	$10+4e^{3t}$	0,2	3,5	10	6	0
33	2	$-5e^{2t}+7\cos((\mathrm{p}t)/3)$	0,5	6	6,5	0	0
34	0,2	$-4t-e^{2t}$	1	5,5	9	–3	0
35	3,5	$-2+8\sin((\mathrm{p}t)/3)$	1	5	7	6	3
36	1	$-2e^{t}+t+5\cos((\mathrm{p}t)/4)$	1,5	6	7	6	4
37	1,5	$-e^{3t}+8\cos((\mathrm{p}t)/3)$	0,2	3,5	8	0	0
38	3	$2+5e^{3t}+4\sin((\mathrm{p}t)/3)$	0	5,5	9,5	3	2
39	3	$8t^{2}+7\sin((\mathrm{p}t)/2)$	0,2	5	8,5	–3	1
40	1,5	$-5e^{2t}-5t^{2}$	2	5	8	7	0
41	1,5	$5e^{2t}+2\sin((\mathrm{p}t)/2)$	0,2	6	10	4	–1
42	1,5	$3e^{2-t}+6\cos((\mathrm{p}t)/4)$	0	5	6,5	8	–6
43	3,5	$5+e^{2t}-5\cos((\mathrm{p}t)/4)$	1	5,5	7,5	–3	3
44	3	$t^{2}+3\cos((\mathrm{p}t)/6)$	1,5	5	7,5	3	–6
45	2	$4e^{2t}-5\sin((\mathrm{p}t)/3)$	2	4,5	9	5	4
46	0,2	$7t^{2}-\cos((\mathrm{p}t)/4)$	0	5,5	9,5	0	2
47	1,5	$t+3\cos((\mathrm{p}t)/4)$	1	5,5	9	1	3
48	0,2	$2t+7\sin((\mathrm{p}t)/2)$	0,5	4,5	7	–3	4
49	3,5	$7\cos((\mathrm{p}t)/4)+t^{3}$	0,5	5	8,5	–2	2
50	3	$e^{t}+10\sin((\mathrm{p}t)/2)$	0,2	5	7	–1	–1
51	0,2	$-e^{3t}+\cos((\mathrm{p}t)/6)$	0	3	8	–3	2
52	2,5	$e^{2+t}+6\sin((\mathrm{p}t)/3)$	0,2	3,5	7,5	–2	–6

Продолжение табл. 5.1

№ п/п	**m, кг**	**$F_x(t)$, Н**	**t_1, с**	**t_2, с**	**t_3, с**	**Начальные условия**	
						x_0, м	**v_{0x}, м/с**
53	0,2	$-4e^{3t}+t^2+3t$	1,5	5,5	9,5	5	3
54	1	$9+2e^{t}$	2	3	8	8	–5
55	1	$5t^2+6e^{5-t}$	0,5	4,5	8,5	6	1
56	3,5	$-5e^{3-t}+2\sin((pt)/6)$	1,5	4	8	7	–5
57	1,5	$2e^{3t}+3\cos((pt)/3)$	2	5,5	9,5	5	–2
58	2	$-3\cos((pt)/3)$	1,5	6	8	–4	2
59	2,5	$4e^{t}+9\cos((pt)/4)$	1	5	7,5	–1	0
60	2	$-t+10\cos((pt)/2)$	0	5,5	9	–3	2
61	0,2	$4t^3+9\sin((pt)/2)$	1,5	5,5	6,5	–5	3
62	2	$7t+10\sin((pt)/2)$	1,5	5	8	6	–4
63	0,5	$-3t^3-5\cos((pt)/4)$	0	4,5	8,5	6	2
64	3,5	$\cos((pt)/4)$	0	5	7,5	4	1
65	1,5	$e^{t}-3\cos((pt)/4)$	2	4	7	4	–6
66	2	$-2t+\sin((pt)/3)$	1,5	5,5	7,5	–1	–6
67	1,5	$10t+7\cos((pt)/4)$	0,2	5	8,5	–2	3
68	2	$10t^2-7\sin((pt)/3)$	2	3,5	10	–2	–5
69	1	$2e^{3-t}+6\cos((pt)/3)$	2	3	8,5	1	–5
70	1	$3t^4+5\sin((pt)/3)$	1	6	8,5	–3	0
71	3	$7\sin((pt)/2)$	1,5	4	9	8	3
72	0,2	$5\cos((pt)/4)-3t$	1	4,5	9	4	–1
73	0,2	$9\cos((pt)/4)$	0,5	3	8	–3	0
74	2,5	$2t^3+7\cos((pt)/4)$	0,2	4,5	7	–3	–4
75	1,5	$-t+3\sin((pt)/2)$	0,5	5,5	10	–1	2
76	3	$e^{2t}+2\cos((pt)/2)$	0	4,5	10	3	–2
77	1	$4\sin((pt)/3)+t$	0,5	5,5	10	0	–5
78	2	$4\sin((pt)/2)+t^3$	0	6	9,5	–2	–5
79	0,5	$e^{2-t}+\cos((pt))$	1,5	3,5	10	0	0
80	1	$4t^3+\sin((pt)/2)$	0,2	4	6,5	–3	–4
81	1,5	$9t^2-\cos((pt)/3)$	0,5	6	8	1	–3
82	1,5	$-4t+6\cos((pt)/3)$	0,2	3	6,5	6	–3
83	1,5	$9\cos((pt)/4)$	0,2	4,5	8	2	0
84	2,5	$e^{2-t}+t^2$	0,2	4,5	10	3	0
85	2	$4t^2+10\sin((pt)/2)$	1	4	9,5	–5	4
86	2	$-\sin((pt)/3)$	2	3	8	6	–1

Окончание табл. 5.1

№ п/п	*m*, кг	$F_x(t)$, Н	t_1, с	t_2, с	t_3, с	Начальные условия	
						x_0, м	v_{0x}, м/с
87	3	$3\sin((\mathrm{p}t)/3)$	1	4	6,5	8	–5
88	2,5	$-5\cos((\mathrm{p}t)/4)$	0,2	6	8,5	8	–2
89	0,2	$5\cos((\mathrm{p}t)/4)$	1	6	10	2	2
90	2	$e^{2t}+3t^4$	2	4,5	6,5	4	2
91	2,5	$5t^3+e^{3t+4}$	1,5	6	7	–2	–6
92	0,2	$8\cos((\mathrm{p}t)/3)$	1	4,5	9	4	–6
93	1	$3t^4-\sin((\mathrm{p}t))$	0,5	4,5	8	1	1
94	2	$6t^3+4\sin((\mathrm{p}t)/4)$	2	5	7,5	–3	–1
95	2,5	$-\sin((\mathrm{p}t)/2)$	2	5	7,5	–1	4
96	3	$2t^2+e^{3t+7}$	0,5	5	9,5	5	–1
97	1,5	$-2\cos((\mathrm{p}t)/4)$	2	5	7,5	5	3
98	3	$2t^3-\sin((\mathrm{p}t)/3)$	2	3,5	8	3	–2
99	1	$3t+5\sin((\mathrm{p}t)/2)$	0,5	4,5	8,5	–1	–4
100	1,5	$-5\cos((\mathrm{p}t)/4)+3t$	0,5	5	8	–4	0

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: $F_x(t)=t+e^{2t}+\cos\big((\mathrm{p}t)/6\big)$; $v_x(0)=3$ м/с; $x(0)=1$ м; $t_1=2$ с; $t_2=4$ с; $t_3=7$ с; $m=2$ кг.

Используя второй закон Ньютона (1), определим ускорение точки $a_x(t)$ как функцию времени:

$$a_x(t)=\frac{F_x(t)}{m}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}\cos\big((\mathrm{p}t)/6\big). \qquad (5.1)$$

Интегрирование выражения (5.1) приводит к выражению скорости точки:

$$v_x(t)=\int a_x(t)dt=\int\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}\cos\big((\mathrm{p}t)/6\big)\right)dt=$$

$$=\frac{t^2}{4}+\frac{e^{2t}}{4}+\frac{3}{\pi}\sin\big((\mathrm{p}t)/6\big)+C_1. \qquad (5.2)$$

Константу интегрирования определим из начального условия $v_x(0)=3$ м/с; расчет приводит к следующему значению:

$$v_x(0) = \frac{1}{4}e^0 + C_1 = 3 \to C_1 = 2,75 \text{ м/с}. \qquad (5.3)$$

Координату точки определим с использованием выражения (5.2):

$$x(t) = \int v_x(t)dt = \int\left(\frac{t^2}{4} + \frac{e^{2t}}{4} + \frac{3}{\text{p}}\sin\left((\text{p}t)/6\right) + 2,75\right)dt =$$

$$= \frac{t^3}{12} + \frac{e^{2t}}{8} - \frac{18}{\text{p}^2}\cos\left((\text{p}t)/6\right) + 2,75t + C_2. \qquad (5.4)$$

Константа интегрирования C_2 определяется из условия $x(0) = 1$ м: расчет приводит к следующему:

$$x(0) = \frac{1}{8}e^0 - \frac{18}{\text{p}^2} + C_2 = 1 \to C_2 \approx 2,7 \text{ м}. \qquad (5.5)$$

С учетом (5.5) выражение для координаты примет следующий вид:

$$x(t) = \frac{t^3}{12} + \frac{e^{2t}}{8} - \frac{18}{\text{p}^2}\cos\left((\text{p}t)/6\right) + 2,75t + 2,7. \qquad (5.6)$$

Кинетическую энергию точки $T = m\vec{v}^2/2$ определим с использованием выражения (5.2). Вычисления приводят к следующему:

$$T = \left(\frac{t^2}{4} + \frac{e^{2t}}{4} + \frac{3}{\text{p}}\sin\left((\text{p}t)/6\right) + 2,75\right)^2, \qquad (5.7)$$

(5.7) будем использовать для вычисления работы силы. Расчет в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 4$ с приводит к

$$T(t_1) = \left(\frac{t_1^2}{4} + \frac{e^{2t_1}}{4} + \frac{3}{\text{p}}\sin\left((\text{p}t_1)/6\right) + 2,75\right)^2 \approx 18,2 \text{ Дж};$$

$$T(t_2) = \left(\frac{t_2^2}{4} + \frac{e^{2t_2}}{4} + \frac{3}{\text{p}}\sin\left((\text{p}t_2)/6\right) + 2,75\right)^2 \approx 752,8 \text{ Дж}, \qquad (5.8)$$

откуда

$$A_{1,2}(F_x) = T(t_2) - T(t_1) = 734,6 \text{ Дж}. \qquad (5.9)$$

Вычисление импульса силы на интервале $t \in [4 \text{ с}, 7 \text{ с}]$ проведем с использованием общего выражения

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$\vec{S}(t) - \vec{S}(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{F}(t)dt. \qquad (5.10)$$

Подстановка в (5.10) выражения $F_x(t)$ с последующим интегрированием приводит к следующему значению:

$$S_x(t_3) - S_x(t_2) = \Delta S_x = \int\limits_4^7 \left(t + e^{2t} + \cos\left((\mathrm{p}t)/6\right)\right)dt =$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{e^{2t}}{2} + \frac{6}{\mathrm{p}}\sin\left((\mathrm{p}t)/6\right)\right)\Bigg|_4^7 = 59{,}98 \text{ кН} \cdot \text{с}. \qquad (5.11)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

ЗАДАЧА № 6

Точка массы m движется на плоскости XOY под действием силы $\vec{F}(F_x(t), F_y(t))$. Указаны начальные условия: при $t=0$; $v_x(0)=v_{0x}$; $v_y(0)=v_{0y}$; $x(0)=x_0$; $y(0)=y_0$.

Найти:

1. Координаты точки $x(t)$ и $y(t)$.
2. Кинетическую энергию точки как функцию времени.
3. Работу силы на интервале времени $t\in[t_1, t_2]$; $t_2>t_1$ (время выбрать самостоятельно).

Исходные данные приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Исходные данные

№ п/п	$F_x(t)$, Н	$F_y(t)$, Н	Начальные условия				m, кг
			x_0, м	y_0, м/с	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	
1	$5+t^3$	$5-t^3$	3	–1	–1	1	2,5
2	$6+1/t$	$e^{2t}+t^3$	–1	0	0	2	1
3	$1+t^3$	$-2t$	1	3	–2	0	1
4	$5+2t^2$	$-2e^t+t^2$	–2	3	–1	2	2,5
5	$2/t+6t$	$-3t^3$	–1	3	3	–2	4
6	$2+t^2$	$3e^t-t^2$	–2	1	2	1	5
7	$3+6t^2$	$-e^{2t}-t$	1	2	3	3	0,5
8	$6+2t-t^2$	$3e^{2+t}+t^3$	1,5	1	3	1	3,5
9	$6+3t^2$	$-2e^t-2t^2$	2	–1	1	–1	4
10	$1+2t^3$	e^t-2t^2	–1	1	3	0	4
11	$5+6t^3$	$4e^{1+t}-3$	3	–1	3	–2	4
12	$3+6t^3$	$2e^t-t^3$	1	3	–2	1	2
13	$6+4/t^2$	$t+5$	0	3	0	–2	4
14	$4+t^3$	$2e^t+2t^3$	1	2	1	3	2
15	$4t^2+3t-5$	e^t+3t^2	–2	3	1	2	0,5
16	$2+5t$	$2e^{3t}-t^2$	0	2	1	3	4
17	$5-3t+t^2$	$4-t^2$	2	–2	0	1	5
18	$8+2/t$	$e^{2t}-t^2$	3	–1	–2	–2	4,5
19	$4+6t^3$	$3e^t-2t^3$	2	1	–2	–1	2,5
20	$2-3t^3$	$-3t^2$	–1	1	2	3	4
21	$6+6t^2+5t^3$	$-3e^t-t^2$	3	–1	–1	–2	4,5

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Продолжение табл. 6.1

№ п/п	$F_x(t)$, Н	$F_y(t)$, Н	Начальные условия				m, кг
			x_0, м	y_0, м/с	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	
22	$8+4t+7t^4$	$4t+3$	1	0	3	–1	3,5
23	$2+6t^2$	$5e^{2-t}+3t$	0	0	–2	–2	1
24	$6+2/t$	$t-t^2$	0	–2	0	0	2,5
25	$1+4t^2$	$e^{3t}+t^2$	0	3	–1	1	3
26	$3+3t^2$	$e^{3t}-t^3$	3	0	3	2	1
27	$1+2t^2+t^3$	$2e^{t+1}-t$	–2	–1	1	2	3
28	$3+4t^3$	$e^{1+t}-t^3$	3	3	3	2	1,5
29	$3t+2t^3+6$	$3e^{t}-2t$	0	2	–1	–1	0,5
30	$5+4t^2$	$e^{2t}+3t^3$	2	0	0	2	2
31	$3+2t^3-4t$	$5-t^3+t$	3	0	0	2	4,5
32	$6+1/t^2$	$e^{2t}-t$	–1	0	–1	–2	4
33	$9\sin((pt)/2)$	$2\sin((pt)/3)$	0	1	–2	–2	0,5
34	$-\cos((pt)/4)$	$4\sin((pt)/2)$	2	–1	1	–1	0,5
35	$3\sin((pt)/2)$	$8\sin((pt)/3)$	1	–2	–2	2	2,5
36	$9\sin((pt)/2)$	$-\sin((pt)/4)$	–2	–2	3	–1	2,5
37	$-2\cos((pt)/4)$	$2\cos((pt)/3)$	3	–1	1	–1	3,5
38	$5\cos((pt)/4)$	$\sin((pt)/4)$	1	–2	–2	–1	1,5
39	$7\sin((pt)/3)$	$-\sin((pt)/4)$	1	–1	1	2	2,5
40	$2t+t^2$	$3e^{t}-t^2$	–2	3	0	0	3,5
41	$3+6t^2$	$e^{2t}+4t$	0	–1	0	0	0,5
42	$6+2t$	$3e^{2+t}+t^3$	–2	0	–1	3	4
43	$6t+2t^2$	$-2e^{t}-2t^2$	1	2	2	1	4
44	$1+2t^3$	$e^{t}-2t^2$	2	0	2	3	4
45	$-6t^3+4t$	$4e^{1+t}-3$	0	–1	0	2	2,5
46	$2+t^3$	$2e^{t}-t^3$	2	1	3	–2	4
47	$6+4/t^2$	$t-5/t$	1	2	–2	–1	1
48	$2+3t^3$	$2e^{t}+2t^3$	–1	2	2	–1	4
49	$4+6t$	$e^{t}+3t^2$	–2	1	–2	–1	4,5
50	$2t^2+5t$	$2e^{3t}-t^2$	0	2	–2	1	1,5
51	$\sin((pt)/4)$	$4\sin((pt)/2)$	3	3	2	3	3,5
52	$-\sin((pt)/4)$	$\cos((pt)/2)$	3	1	2	–2	2
53	$4\sin((pt)/2)$	$-\cos((pt)/2)$	1	1	2	0	4,5
54	$\cos((pt)/3)$	$3\cos((pt)/4)$	0	2	0	2	2,5
55	$9\cos((pt)/2)$	$-\cos((pt)/4)$	2	1	–2	0	5
56	$-2\cos((pt)/2)$	$2\cos((pt)/4)$	–2	0	–2,5	1	1,5
57	$8\sin((pt)/3)$	$8\sin((pt)/3)$	1	0	3	–2	1

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Продолжение табл. 6.1

№ п/п	$F_x(t)$, Н	$F_y(t)$, Н	Начальные условия				m, кг
			x_0, м	y_0, м/с	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	
58	$-5\sin((\text{p}t)/2)$	$5\cos((\text{p}t)/4)$	0	2	1	0	4,5
59	$2\sin((\text{p}t)/4)$	$10\cos((\text{p}t)/2)$	3	–1	1	1	1,5
60	$4+5t+3t^3$	$4-3t^2$	0	0	0	1	1
61	$3+6t^2$	$7e^t-t^2$	2	0	–1	–2	3
62	$8t^3+4t$	$4t+3$	–2	1	1	0	3,5
63	$2+6t^2$	$5e^{2-t}+3t$	0	–1	3	0	1,5
64	$6+2/t$	$t+4t^2$	–1	2	2	3	2
65	$2+t^2$	e^t+t	2	2	3	–1	4
66	$1+5t^2$	$e^{3t}-t^3$	2	2	2	0	3
67	$\cos((\text{p}t)/2)$	$3\cos((\text{p}t)/3)$	3	0	3	–2	1
68	$5\cos((\text{p}t)/4)$	$\sin((\text{p}t)/2)$	3	–2	–1	0	3
69	$2\sin((\text{p}t)/3)$	$2\sin((\text{p}t)/4)$	0	0	0	3	2
70	$2t+t^2$	$3e^t-t^2$	2	0	1	2	3
71	$5+6t^2$	$e^{2t}+4t$	1	2	2	1	2
72	$-5+2t-t^3$	$2e^{2+t}+t^2$	–2	–2	1	3	1
73	$6t+2t^2$	$-2e^t-2t^2$	0	–2	3	3	3
74	$3+2t$	e^t-2t^2	–2	1,5	3	2	1
75	$-6t^3+4t$	$4e^{1+t}-3$	3	–2	3	0	0,5
76	$7-2t-t^3$	$2e^t-t^3+4t$	2	2	2	–2	5
77	$6+4/t^2$	t^2-5/t	0	–2	–2	3	4
78	$6\ln t$	t^2-2t+4	3	1	1	1	1
79	$2e^t-t$	$2\ln t-t^2$	–2	3	3	3	0,5
80	$-\sin((\text{p}t)/4)$	$-2\cos((\text{p}t)/4)$	–2	–1	–2	0	5
81	$\cos((\text{p}t)/2)$	$-3\sin((\text{p}t)/4)$	3	1	–1	–1	2,5
82	$2\sin((\text{p}t)/3)$	$3\sin((\text{p}t)/3)$	3	–1	0	0	1
83	$4\sin((\text{p}t)/2)$	$8\sin((\text{p}t)/4)$	3	1	–2	3	3,5
84	$\sin((\text{p}t)/3)$	$9\cos((\text{p}t)/3)$	1	0	3	–1	3
85	$-\sin((\text{p}t)/4)$	$4\sin((\text{p}t)/4)$	0	–2	0	2	1,5
86	$2\cos((\text{p}t)/3)$	$5\sin((\text{p}t)/2)$	1	–2	3	2	2,5
87	$2t^3+5t$	$4e^{3t}-t^2$	0	1	1	0	1
88	$5+2t^2$	$4-5t^2$	1	–1	–1	0	3,5
89	$3+1/t$	$e^{2t}-t^2+5t$	–1	0	1	3	1
90	$4t+6t^3$	$2e^t-t^3$	0	0	1	–1	3,5
91	$4t+t^2$	$t-3t^2$	2	–1	2	2	0,5
92	$6+2t^2-t^3$	$2-3e^t$	–2	–1	0	3	2
93	$8+4t+t^2$	$4t+3$	–1	1	2	1	3

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Окончание табл. 6.1

№ п/п	$F_x(t)$, Н	$F_y(t)$, Н	Начальные условия				m, кг
			x_0, м	y_0, м/с	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	
94	$2+6t^2$	$5e^{2-t}+3t$	–1	–2	0	–1	2
95	$6+2/t$	$3t^2+2t-4$	3	–2	1	3	0,5
96	$t+3t^2$	$e^{3t}+t^2$	–2	–1	2	2	1,5
97	$3+3t^2$	$2e^{3t}+3$	3	–2	3	2	3
98	$2\ln t$	$4t^2+t$	0	1	1	0	4
99	$2e^t-t$	$3-5t+\ln t$	1	0	–2	–1	2,5
100	$5+\ln t$	$2-4t^3$	2	–1	–1,5	1	3

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: $F_x(t) = 4t - t^2 + e^t$ Н; $F_y(t) = 6\cos\big((\mathrm{p}t)/3\big)$ Н; $m = 2$ кг; $v_{0x} = 6$ м/с; $v_{0y} = -2$ м/с; $x_0 = 1$ м; $y_0 = 0$ м.

Используя второй закон Ньютона (1), определим компоненты вектора ускорения для осей OX и OY соответственно:

$$a_x(t) = \frac{F_x(t)}{m} = \frac{4t - t^2 + e^t}{2} = 2t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^t; \qquad (6.1)$$

$$a_y(t) = \frac{F_y(t)}{m} = \frac{6\cos\big((\mathrm{p}t)/3\big)}{2} = 3\cos\big((\mathrm{p}t)/3\big). \qquad (6.2)$$

Интегрирование приводит к выражениям компонент скорости точки:

$$v_x(t) = \int a_x(t)dt = \int\left(2t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^t\right)dt = t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}e^t + C_1; \qquad (6.3)$$

$$v_y(t) = \int a_y(t)dt = \int 3\cos\big((\mathrm{p}t)/3\big)dt = \frac{9}{\pi}\sin\big((\mathrm{p}t)/3\big) + C_2. \qquad (6.4)$$

Константы интегрирования определим из начальных условий $v_{0x} = 6$ м/с и $v_{0y} = -2$ м/с. Расчет приводит к следующим значениям:

$$v_x(0) = \frac{1}{2}e^0 + C_1 = 6 \to C_1 = 5{,}5 \text{ м/с}; \qquad (6.5)$$

$$v_y(0) = \frac{9}{\mathrm{p}}\sin(0) + C_2 = -2 \to C_2 = -2 \text{ м/с}. \qquad (6.6)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Координаты точки определим из выражений (6.3) и (6.4) с учетом вычисленных констант. Интегрирование приводит к следующему:

$$x(t) = \int v_x(t)dt = \int\left(t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}e^t + 5,5\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{2}e^t + 5,5t + C_3; \qquad (6.7)$$

$$y(t) = \int v_y(t)dt = \int\left(\frac{9}{\mathrm{p}}\sin\left((\mathrm{p}t)/3\right) - 2\right)dt =$$

$$= -\frac{27}{\mathrm{p}^2}\cos\left((\mathrm{p}t)/3\right) - 2t + C_4. \qquad (6.8)$$

Аналогичные вычисления для начальных условий $x_0 = 1$ м и $y_0 = 0$ м приводят к значениям констант интегрирования C_3 и C_4:

$$x(0) = \frac{1}{2}e^0 + C_3 = 1 \to C_3 = 0,5 \text{ м}; \qquad (6.9)$$

$$y(0) = -\frac{27}{\mathrm{p}^2}\cos(0) + C_4 = 0 \to C_4 \approx 2,74 \text{ м}. \qquad (6.10)$$

Окончательный ответ для координат $x(t)$ и $y(t)$ примет следующий вид:

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{2}e^t + 5,5t + 0,5; \qquad (6.11)$$

$$y(t) = -\frac{27}{\mathrm{p}^2}\cos\left((\mathrm{p}t)/3\right) - 2t + 2,74. \qquad (6.12)$$

Кинетическую энергию $T = m\vec{v}^2/2$ определим с использованием выражений (6.3) и (6.4). Подстановка в

$$T = \frac{m}{2}\left(v_x^2(t) + v_y^2(t)\right) \qquad (6.13)$$

после некоторых упрощений приводит к выражению для кинетической энергии точки как функции времени:

$$T(t) = \left(t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}e^t + 5,5\right)^2 + \left(\frac{9}{\mathrm{p}}\sin\left((\mathrm{p}t)/3\right) - 2\right)^2. \qquad (6.14)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Работу силы определим с использованием теоремы об изменении кинетической энергии [см. (4)]. Подстановка $t_1 = 1\ c$ и $t_2 = 5\ c$ в (6.14) приводит к следующим значениям:

$$T(t_1) = 59{,}4 \text{ Дж};\ T\left(t_2\right) = 7054{,}8 \text{ Дж}, \qquad (6.15)$$

откуда работы силы

$$A\left(t \in \left[t_2,\, t_1\right]\right) = T(t_2) - T(t_1) = 6995{,}4 \text{ Дж}. \qquad (6.16)$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

ЗАДАЧА № 7

Дано дифференциальное уравнение движения точки вдоль прямой OX $A\ddot{x} + Bx + D\dot{x} = 0$.

1. Не интегрируя данное уравнение изучить качественный характер движения точки. Если движение периодическое, то вычислить период колебаний и указать поведение амплитуды с течением времени.

2. Проинтегрировать заданное уравнение. Начальные условия при $t = 0$ $x(0) = x_0$ и $v_x(0) = v_{0x}$ заданы.

3. Рассмотреть два варианта с $D = 0$ и $D \neq 0$.

Исходные данные приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Исходные данные

№ п/п	A, кг	B, кг/м^2	D, кг/с	x_0, м	y_{0x}, м/с	№ п/п	A, кг	B, кг/м^2	D, кг/с	x_0, м	y_{0x}, м/с
1	6	4	9	5	3	51	1	9	10	5	4
2	10	2	8	6	5	52	8	1	3	1	4
3	6	10	5	3	4	53	5	8	12	1	2
4	9	4	7	0	5	54	3	7	9	2	3
5	7	15	2	3	1	55	10	6	10	5	3
6	6	12	6	0	5	56	5	8	2	2	1
7	10	4	10	2	5	57	3	1	2	4	1
8	8	3	9	0	3	58	3	3	4	0	1
9	7	4	1	5	1	59	10	9	1	4	3
10	2	7	9	6	2	60	11	4	7	0	3
11	3	7	6	4	1	61	11	5	7	1	0
12	2	15	1	5	1	62	6	6	5	1	5
13	8	3	4	6	4	63	4	1	3	2	4
14	1	10	6	0	5	64	2	5	2	1	4
15	10	12	10	7	4	65	7	9	12	2	5
16	8	2	9	7	5	66	5	10	3	1	1
17	6	11	4	1	5	67	7	1	11	1	2
18	4	14	8	3	5	68	5	3	12	3	4
19	4	2	1	1	1	69	1	1	8	3	4
20	5	11	6	7	2	70	6	12	11	0	2
21	7	10	7	4	1	71	2	5	4	2	0
22	6	15	7	3	2	72	4	3	3	1	5
23	9	7	7	6	1	73	8	10	6	3	5
24	8	9	1	6	2	74	11	5	5	5	1
25	6	9	6	2	5	75	3	9	3	2	0

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Окончание табл. 7.1

№ п/п	*A*, кг	*B*, кг/м²	*D*, кг/с	x_0, м	y_{0x}, м/с	№ п/п	*A*, кг	*B*, кг/м²	*D*, кг/с	x_0, м	y_{0x}, м/с
26	3	5	5	5	2	76	4	3	3	3	1
27	6	4	6	0	5	77	10	8	11	1	2
28	7	12	2	7	5	78	9	7	11	2	4
29	4	5	3	0	5	79	11	8	5	2	5
30	2	9	9	5	5	80	5	8	4	2	5
31	7	10	5	5	0	81	3	9	7	4	0
32	3	7	10	0	4	82	11	9	7	1	4
33	6	10	7	5	5	83	1	5	10	4	2
34	10	15	10	2	2	84	9	12	8	1	5
35	2	8	3	3	2	85	7	2	3	5	2
36	3	8	8	3	3	86	2	12	3	1	1
37	5	5	6	4	0	87	11	3	7	5	1
38	8	13	7	3	3	88	3	7	4	0	4
39	5	15	1	3	5	89	12	7	11	0	2
40	7	7	1	3	4	90	5	10	4	4	3
41	8	11	1	3	4	91	1	9	10	4	5
42	5	4	1	7	5	92	1	6	10	4	0
43	8	11	2	1	4	93	4	4	6	4	5
44	9	6	10	0	0	94	12	3	12	5	3
45	7	5	9	0	1	95	12	10	6	3	3
46	1	14	9	6	3	96	5	2	8	0	4
47	7	11	5	0	2	97	10	5	1	4	5
48	10	14	5	1	5	98	8	3	3	5	0
49	8	14	4	4	0	99	7	5	8	5	4
50	9	11	8	5	2	100	12	9	2	4	3

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: A = 1 кг; B = 20 кг/с^2; D = 8 кг/с; x_0 = 4 м; v_{0x} = 1 м/с.

Приведем дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) + 8\dot{x}(t) + 20x(t) = 0 \qquad (7.1)$$

к стандартному виду:

$$\ddot{x}(t) + 2\text{в}\dot{x}(t) + \text{щ}^2 x(t) = 0. \qquad (7.2)$$

[см. (6), (7)]. Из (7.1) и (7.2) нетрудно установить, что

$$\text{в} = 4\ \text{с}^{-1};\ \ \text{щ} = \sqrt{20} \approx 4{,}47\ \text{с}^{-1}. \qquad (7.3)$$

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

Если $щ > в$ дифференциальное уравнение описывает периодический режим затухающих колебаний. Ответ в таком случае определяется выражением [см. (12)]:

$$x(t) = ae^{-вt} \sin\left(\sqrt{щ^2 - в^2}\, t + ц_0\right) \tag{7.4}$$

с периодом $T_{з.к} = 2р \Big/ \sqrt{щ_0^2 - в^2} = 3{,}14$ с.

Константы a и $ц_0$ определим из начальных условий $x_0 = 4$ м и $v_{0x} = 1$ м/с. С использованием выражений (7.4) и

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = ae^{-вt}\left(щ\cos\left(\sqrt{щ^2 - в^2}\, t + ц_0\right) - в\sin\left(\sqrt{щ^2 - в^2}\, t + ц_0\right)\right) \tag{7.5}$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x(0) = a\sin(\varphi_0) = 4 \text{ м}; \\ v_z(0) = a\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\cos(\varphi_0) - \beta\sin(\varphi_0)\right) = 1 \text{ м/с}, \end{cases} \tag{7.6}$$

откуда $a \approx 9{,}39$ м и $ц_0 \approx 0{,}44$ рад. Окончательный ответ для изучаемого примера примет следующий вид:

$$x(t) = 9{,}39\ e^{-4t}\sin\left(2t + 0{,}44\right). \tag{7.7}$$

График колебательного процесса (7.1) с $x_0 > 0,\ v_{0x} > 0$ соответствует рис. 3, *а*.

Случаю $D = 0$ соответствует $в = 0$. Дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) + 20\ x(t) = 0 \tag{7.8}$$

соответствует свободным колебаниям с периодом $T = 2р/щ \approx 1{,}4$ с. Решение дифференциального уравнения (7.8) в таком случае будем искать в виде [см. (9)]:

$$x(t) = A\sin\left(щt + ц_0\right). \tag{7.9}$$

Амплитуду и начальную фазу колебаний определим из (10): вычисления приводят к следующему:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{0x}}{щ}\right)^2} \approx 4 \text{ м};\quad ц_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{щ_0 x_0}{v_{0x}}\right) \approx 1{,}51 \text{ рад}, \tag{7.10}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

откуда

$$x(t) = 4\sin\left(4,47t + 1,51\right). \qquad (7.11)$$

График колебательного процесса (7.8) с $x_0 > 0,\ v_{0x} > 0$ соответствует рис. 1, *а*.

Для общности разберем случай апериодического затухания $в \geq щ$. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 8x(t) = 0, \qquad (7.12)$$

в котором

$$в = 3\ с^{-1};\ щ = \sqrt{8} \approx 2,82\ с^{-1}. \qquad (7.13)$$

В случае $в > щ$ решение дифференциального уравнения [см. (11)] принимает следующий вид:

$$x(t) = C_1 e^{\left(-в + \sqrt{в^2 - щ^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-в - \sqrt{в^2 - щ^2}\right)t}. \qquad (7.14)$$

После некоторых расчетов приходим к промежуточному результату:

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t}. \qquad (7.15)$$

Константы интегрирования определим из начальных условий $x_0 = 4$ м и $v_{0x} = 1$ м/с. Вычисление производной (7.15) приводит к выражению для скорости маятника:

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}. \qquad (7.16)$$

Из соотношений (7.15) и (7.16) с учетом начальных условий получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 4\ м; \\ v_x(0) = -2C_1 + 4C_2 = 1\ м/с. \end{cases} \qquad (7.17)$$

Решение (7.17) приводит к $C_1 = 8,5$ и $C_2 = -4,5$, откуда для случая апериодических колебаний (7.12) окончательно получаем

$$x(t) = 8,5\ e^{2t} - 4,5\ e^{4t}. \qquad (7.18)$$

График колебательного процесса (7.14) с $x_0 > 0;\ v_{0x} > 0$ соответствует рис. 2, *а*.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

В заключении разберем случай границы апериодичности $в = щ$. Из дифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 9x(t) = 0 \tag{7.19}$$

получаем:

$$в = 3\ \text{с}^{-1};\ \ щ = \sqrt{9} = 3\ \text{с}^{-1}. \tag{7.20}$$

Решение дифференциального уравнения (7.19) при условии $в = щ$ записывается в виде

$$x(t) = e^{-щ_0 t}\left(C_1 t + C_2\right). \tag{7.21}$$

Проводя некоторые вычисления из выражения

$$x(t) = e^{-3t}\left(C_1 t + C_2\right), \tag{7.22}$$

получаем выражение для скорости маятника:

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = C_1 e^{-3t} - 3e^{3t}(C_1 t + C_2). \tag{7.23}$$

Использование начальных условий $x_0 = 4$ м и $v_{0x} = 1$ м/с приводит к следующей системе:

$$\begin{cases} x(0) = e^0\left(C_1 \cdot 0 + C_2\right) = 4\ \text{м}; \\ v_x(0) = C_1 e^0 - 3e^0\left(C_1 \cdot 0 + C_2\right) = 1\ \text{м/с}. \end{cases} \tag{7.24}$$

Из (7.24) нетрудно получить $C_1 = 13$ и $C_2 = 4$; решение дифференциального уравнения (7.19) примет следующий вид:

$$x(t) = e^{-3t}\left(13t + 4\right). \tag{7.25}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

ЗАДАЧА № 8

Дано дифференциальное уравнение движения точки вдоль прямой OX $A\ddot{x} + Bx = D\sin(pt + c\text{p})$.

1. Не интегрируя данное уравнение изучить качественный характер движения точки. Если движение периодическое, то вычислить период колебаний и указать поведение амплитуды с течением времени.

2. Проинтегрировать заданное уравнение. Начальные условия при $t = 0$ $x(0) = x_0$ и $v_x(0) = v_{0x}$ заданы.

3. Рассмотреть два варианта с $D = 0$ и $D \neq 0$.

Исходные данные приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1

Исходные данные

№ п/п	A, кг	B, кг/с^2	D, (кг · м)/с^2	p, рад/с	c, рад	x_0, м	y_{0x}, м/с
1	5	10	2	1	1/6	1	1
2	8	13	11	1	1/3	0	3
3	9	1	3	3	1/4	0	1
4	10	10	3	0,5	1/6	3	4
5	1	2	2	3	1/4	0	4
6	7	10	6	1,5	1/3	4	8
7	11	9	1	3	1/6	5	1
8	9	16	4	1,5	1	0	5
9	13	13	10	4	1/3	7	1
10	2	3	4	4	1	4	10
11	8	6	3	1	1/4	0	6
12	9	6	6	4	1/2	3	7
13	12	10	3	3	1/4	3	4
14	6	13	6	2,5	1/6	2	0
15	10	13	7	3,5	1/2	8	5
16	11	15	10	4	1/2	2	6
17	4	3	7	2	1/2	3	3
18	1	4	5	2,5	1/3	8	2
19	11	16	7	4	1/4	7	9
20	7	12	5	0,5	1/4	3	0
21	1	14	1	3,5	1	4	2
22	4	16	11	1	1	5	6
23	13	9	8	1,5	1/3	2	0
24	10	9	9	0,5	1/4	1	7
25	12	5	2	2,5	1/3	2	7

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Продолжение табл. 8.1

№ п/п	A, кг	B, кг/с^2	D, (кг · м)/с^2	p, рад/с	c, рад	x_0, м	y_{0x}, м/с
26	6	14	3	4	1/2	0	3
27	8	3	10	3,5	1/3	8	1
28	7	12	2	2	1/2	7	0
29	10	2	10	3,5	1/6	2	1
30	13	1	7	3	1/4	1	10
31	13	7	7	4	1/4	8	9
32	8	9	8	2	1	3	4
33	11	8	6	1,5	1	8	5
34	10	5	5	1	1/4	1	3
35	3	16	8	3,5	1/4	8	9
36	9	11	1	3	1/3	4	3
37	3	12	6	2,5	1/6	5	3
38	1	3	2	0,5	1/4	3	6
39	10	9	2	1,5	1/4	0	9
40	1	14	10	0,5	1/2	1	4
41	10	13	3	0,5	1/6	1	6
42	7	8	1	0,5	1/4	1	6
43	7	11	11	2,5	1/4	4	5
44	10	3	9	2,5	1/3	7	0
45	4	14	1	2,5	1	5	4
46	13	16	4	3	1/2	0	9
47	11	14	6	2	1/3	2	10
48	2	13	10	2	1	6	7
49	1	4	1,5	0,5	1	2	1
50	2	8	10	3	1/4	3	3
51	9	5	1	1	1/4	4	8
52	6	6	1	1,5	1/4	1	4
53	12	8	9	3,5	1/4	3	10
54	12	6	11	2	1/2	0	6
55	3	10	6	2	1/3	7	3
56	2	15	8	1,5	1/4	8	2
57	7	11	3	4	1/3	3	5
58	11	16	8	4	1	1	6
59	3	14	10	2,5	1/2	6	10
60	12	9	5	3,5	1/4	0	10
61	12	11	1	3	1	5	6
62	3	3	3	3	1/4	2	3
63	8	2	10	1	1/2	4	6
64	6	12	5	3	1/2	3	8
65	6	4	2	4	1	7	4

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Окончание табл. 8.1

№ п/п	A, кг	B, кг/с^2	D, (кг · м)/с^2	p, рад/с	c, рад	x_0, м	y_{0x}, м/с
66	4	11	7	2,5	1/3	8	9
67	7	1	11	4	1/2	5	10
68	2	2	5	1	1/2	6	4
69	3	2	10	1,5	1	1	9
70	1	10	8	3	1/4	7	6
71	3	8	7	2	1	8	3
72	10	1	2	2,5	1/3	3	3
73	1	11	5	1,5	1/2	8	4
74	13	7	1	2	1	1	9
75	10	6	2	0,5	1/2	5	6
76	10	5	7	3	1/4	0	5
77	10	3	10	3,5	1/6	8	3
78	7	6	9	4	1/6	6	10
79	4	7	2	3,5	1	0	7
80	7	7	10	1	1/6	4	0
81	3	16	2,5	4	1/2	3	3
82	6	14	3	0,5	1/3	1	8
83	3	9	10	4	1/6	7	8
84	9	3	7	1	1/4	1	3
85	6	8	4	3,5	1/3	4	6
86	12	6	1	0,5	1/2	3	4
87	5	1	5	1,5	1/4	1	0
88	6	3	7	3,5	1/6	3	6
89	12	3	4	1	1/4	0	1
90	9	14	1	3	1/4	1	6
91	8	5	3	1,5	1	8	8
92	7	3	9	4	1/4	7	10
93	11	10	9	3	1/3	4	4
94	1	6	2	2,5	1/6	4	6
95	5	16	8	3,5	1/6	3	8
96	9	7	6	1	1/4	8	1
97	13	3	2	4	1/4	8	0
98	10	2	5	2	1/6	3	1
99	6	4	11	3	1/6	7	9
100	6	4	5	1,5	1/2	0	7

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: A = 2 кг; B = 4 кг/с^2; D = 5 (кг · м)/с^2; p = 3 рад/с; c = 1/6 рад; x_0 = 3 м; v_{0x} = 4 м/с.

Приведем дифференциальное уравнение

$$2\ddot{x}(t) + 8x(t) = 5\sin\left(3t + \frac{\text{p}}{6}\right) \tag{8.1}$$

к стандартному виду. После некоторых вычислений из (8.1) получаем

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = 2{,}5\sin\left(3t + \frac{\text{p}}{6}\right), \tag{8.2}$$

откуда [см. (15)] $\text{щ} = \sqrt{4} = 2$ рад/с, $p = 3$ рад/с и $h = 2{,}5$ кг · м /с^2. Поскольку $p > \text{щ}$ изучаемое уравнение соответствует вынужденным колебаниям большой частоты.

Решение уравнения (8.2) будем искать как сумму общего $x_{\text{об}}(t)$ и частного $x_{\text{ч}}(t)$ решений. Общее решение уравнения

$$\ddot{x}_{\text{об}}(t) + 4x_{\text{об}}(t) = 0 \tag{8.3}$$

будем искать в виде [сравним с (9)]:

$$x_{\text{об}}(t) = C_1 \sin(\text{щ}t) + C_2 \cos(\text{щ}t). \tag{8.4}$$

Частное решение определим исходя из вида правой части уравнения (8.1), в рассматриваемом случае

$$x_{\text{ч}}(t) = \tilde{A}\sin\left(3t + \frac{\text{p}}{6}\right), \tag{8.5}$$

где $\tilde{A}$ – неизвестный коэффициент. Для определения последнего вычислим производные по времени от выражения (8.5):

$$\dot{x}_{\text{ч}}(t) = -3\tilde{A}\sin\left(3t + \frac{\text{p}}{6}\right); \quad \ddot{x}_{\text{ч}}(t) = -9\tilde{A}\cos\left(3t + \frac{\text{p}}{6}\right) \tag{8.6}$$

и подставим в исходное уравнение (8.2). Вычисления дают

$$\ddot{x}_{\text{ч}}(t) + 4x_{\text{ч}}(t) = -5\tilde{A}\sin\left(3t + \frac{\text{p}}{6}\right). \tag{8.7}$$

Сравнение коэффициентов правых частей выражений (8.2)

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

и (8.7) приводит к значению $\tilde{A} = -1/2$. С учетом (8.4) и (8.5) получаем

$$x(t) = C_1 \sin\left(\text{щ}t\right) + C_2 \cos\left(\text{щ}t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(3t + \frac{\text{р}}{6}\right). \tag{8.8}$$

Константы C_1, C_2 определим из начальных условий. Вычисление производной выражения (8.8):

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = C_1\text{щ}\cos\left(\text{щ}t\right) - C_2\text{щ}\sin\left(\text{щ}t\right) - \frac{3}{2}\cos\left(3t + \frac{\text{р}}{6}\right) \tag{8.9}$$

с учетом значений $\text{щ} = 2$ рад/с; $x_0 = 3$ м; $v_{0x} = 4$ м/с приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x(0) = -\dfrac{1}{4} + C_1 = 3; \\ v_x(0) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4} + 2C_2 = 4, \end{cases} \tag{8.10}$$

откуда $C_1 = 3,25$ и $C_2 \approx 2,65$. Для случая $D \neq 0$ окончательно получаем

$$x(t) = 3,25\sin\left(\text{щ}t\right) + 2,65\cos\left(\text{щ}t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(3t + \frac{\text{р}}{6}\right). \tag{8.11}$$

В случае $D = 0$ уравнение (8.1) примет следующий вид:

$$2\ddot{x}(t) + 8x(t) = 0, \tag{8.12}$$

откуда

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0. \tag{8.13}$$

Решение уравнения (8.13) будем искать в виде [см. (9)]:

$$x(t) = A\sin\left(\text{щ}t + \text{ц}_0\right), \tag{8.14}$$

где A – амплитуда колебаний и ц_0 – начальная фаза. Расчет выражений (10) с учетом $\text{щ} = 2$ рад/с, $x_0 = 3$ м и $v_{0x} = 4$ м/с приводит к следующему:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{0x}}{\omega}\right)^2} = 3,6 \text{ м}; \ \text{ц}_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\text{щ}x_0}{v_{0x}}\right) \approx 0,98 \text{ рад}, \tag{8.15}$$

откуда

$$x(t) = 3,6\sin\left(2t + 0,98\right). \tag{8.16}$$

Полученное выражение (8.16) соответствует решению в случае $D = 0$.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

ЗАДАЧА № 9

Круглый диск (цилиндр) массы m радиуса R вращается вокруг своей центральной оси z, перпендикулярной плоскости диска. Вращение обусловлено моментом внешних сил $M_z^E(t)$.

Заданы начальные условия: при $t = 0$ известно $щ(0) = щ_0$; $ц(0) = ц_0$. Кроме того, указана точка M на расстоянии OM от оси вращения.

Найти:

1. Закон вращения $ц = ц(t)$, рад.

2. Кинетическую энергию диска в момент времени $t = t_1$ с.

3. Работу внешних моментов сил $M_z^E(t)$ на интервале времени $t \in [0,\ t_1]$.

4. Скорость и ускорение точки M в момент времени $t = t_1$ с.

Исходные данные приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Исходные даннные

№ п/п	m, кг	R, м	OM, м	t_1, с	$M_z^E(t)$, Н · м	Начальные условия	
						φ_0, рад	ω_0, рад/с
1	3	3	R/4	3	$4+4t^2$	р / 4	1
2	2,5	5	R/6	2	$9-3t^4$	–р / 4	–1
3	2,5	8	R/6	4	$-4+6t+t^2$	–р / 2	–1,5
4	3	7	2R/3	3,5	$1+3t^3$	2р / 3	р
5	1	9	R/3	0,5	$5+4t^2$	р	2
6	2	3	R/5	2	$1+2t-t^3$	–р / 3	1,5
7	1	8	R/5	1	$8+4t-t^2$	2р / 3	0
8	3,5	1	R/5	4	$1+3t$	–р	–1,5
9	3	5	R/6	2,5	$4+3t-t^2$	–р / 4	р / 2
10	2,5	4	R/5	4	$4+3t+6t^2$	–р / 2	р 1,5
11	1	4	R/5	1	$2+5t+2t^4$	р / 6	2р
12	3	8	R/5	3	$6+5t+2t^3$	–р / 2	1
13	4	8	R/6	0,5	$1+5t^2+2t^3$	0	2
14	1	4	R/3	0,5	$3-2t+3t^3$	р	–2
15	3	7	R/5	0,5	$4+4t+3t^3$	2р	–1
16	1	5	R/5	3	$1+5t^3$	–р / 6	1,5

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Продолжение табл. 9.1

№ п/п	*m*, кг	*R*, м	*OM*, м	t_1, с	$M_z^E(t)$, Н · м	Начальные условия	
						φ_0, рад	ω_0, рад/с
17	4	7	2R/3	1,5	$1+t+4t^2$	2p / 3	–1
18	2	5	R/3	4	$3+6t^3$	p / 3	2
19	3	5	R/2	3,5	$4+4t^2$	–p / 4	–2
20	1,5	7	R/5	0,5	$6+6t+2t^2$	0	2p
21	4	4	R/2	3	$5+6t$	–p / 6	–2
22	2,5	1	R/2	2	$3+2t+t^3$	p / 3	2p
23	1,5	5	R/4	0,5	$1+3t$	0	–2
24	1,5	4	R/6	4	$4+t^2$	p	0
25	1,5	4	R/6	3,5	$4+4t+5t^3$	2p	–1
26	2,5	6	R/2	3	$2+t^2+4t^3$	p	–1,5
27	2,5	4	R/6	4	$6+5t^2$	–p / 6	p / 3
28	3	1	R/6	1	$1+6t^2$	p / 2	2
29	2	4	R/2	3,5	$7+2t+5t^3$	–p / 2	1,5
30	4	6	R/4	3	$5+4t^3$	p / 4	2
31	3	4	2R/3	1,5	$-3+t+4t^2$	p	0
32	1	4	3R/5	2,5	$2+3t^3$	–p / 2	–1
33	1	9	4R/5	1,5	$3+6t^2$	0	p / 3
34	1	3	R/3	2,5	$-4+2t+4t^3$	2p / 3	2
35	1,5	8	2R/3	3,5	$6+5t$	p / 6	0
36	0,5	9	R/5	3,5	$7-5t+3t^3$	p / 4	2p
37	3,5	6	R/6	0,5	$1+4t^2$	p	–p / 3
38	3,5	5	R/4	4	$-2+6t-t^5$	–p / 6	0
39	4	5	R/3	1,5	$3+4t-t^3$	–p / 3	1
40	2,5	2	2R/3	4	$5+4t^3$	p / 6	–1,5
41	2	4	R	1,5	$4-3t+2t^2$	p	–1
42	3,5	3	R/6	2	$3+3t$	2p / 3	–2
43	4	3	R/3	2	$4+6t^2$	p / 2	1
44	2	7	R/4	3,5	$6+t^2+5t^3$	–p / 3	1,5
45	2	5	R/5	3,5	$4+4t^3$	0	1
46	2	10	R/3	2	$1+2t+t^3$	p	–1
47	1	9	R/5	1,5	$4+4t+2t^2$	–p / 3	2p / 3
48	4	5	R/3	2	$9-2t+3t^3$	–p / 6	–1
49	4	3	2R/3	3,5	$6+2t^3$	p / 3	–2
50	1	5	2R/5	1,5	$2-3t+4t^3$	p	1
51	3,5	1	R/5	0,5	$5-5t+3t^3$	p / 4	p / 3

Продолжение табл. 9.1

№ п/п	m, кг	R, м	OM, м	t_1, с	$M_z^E(t)$, Н · м	Начальные условия	
						φ_0, рад	ω_0, рад/с
52	0,5	4	R/6	3,5	$4+4t+t^3$	–p / 4	1,5
53	3	7	R/2	4	$2+5t^2$	p / 4	0
54	2	1	R/5	3,5	$5+4t^3$	–p / 3	2p
55	3	6	R/5	3	$1+t+3t^3$	–p / 6	-2
56	0,5	5	R/5	4	$-6+5t^2$	p / 6	1,5
57	4	4	R/4	1,5	$2+4t^2$	p / 6	–2
58	3	8	R/3	3,5	$5+t+6t^2$	–p	–p / 4
59	0,5	5	R/5	2	$1-t+3t^2$	–p / 6	1
60	2	1	R/5	2	$2+3t^2-t^3$	–p / 4	0
61	0,5	1	R/6	2,5	$2+4t$	–p / 2	–2
62	4	5	R/3	3,5	$4+6t$	p / 2	0
63	3,5	10	2R/3	2	$2+4t^2+t^3$	0	1
64	1,5	3	R/4	0,5	$7+3t$	p / 4	p / 2
65	3	4	R/6	1	$5+5t^2$	0	0
66	0,5	6	R/3	2,5	$-3+5t+t^3$	p / 4	p / 4
67	2	10	R	2,5	$1+2t+4t^2$	p / 2	–2
68	1	4	R/4	1,5	$3+6t^3$	p	–1,5
69	2,5	8	R/6	4	$2+8t^3$	–p / 4	2
70	1	3	R/4	4	$8+3t-t^2$	–p / 2	1,5
71	1	3	R/6	3	$-4+2t+t^2$	p / 4	0
72	3,5	1	R/3	2,5	$3+6t^3$	p / 3	p / 2
73	2	5	3R/4	0,5	$1+5t^2+t^3$	p / 4	2
74	2	6	2R/3	2,5	$12t+5t^2$	–p / 4	–2
75	2	1	R	1,5	$6+5t^3$	p	1
76	1	5	R/6	2	$8+2t-t^3$	p / 3	2
77	2,5	5	R/4	2,5	$6+7t^2$	–p / 4	2p
78	3,5	4	R/6	4	$1-t+t^2$	p / 2	p / 3
79	1	9	R/6	2	$5-2t+5t^3$	–p / 4	p / 4
80	2	4	R/6	1	$2+4t^2$	p / 2	1,5
81	1,5	6	3R/5	3,5	$1+t^2+2t^3$	–p	1,5
82	3	8	R/6	2,5	$2+8t^3$	p / 4	–2
83	4	3	R/3	3	$5+t-t^4$	–p	1
84	1	3	R/4	3	$1+3t+t^3$	–p / 3	0
85	2,5	4	R/6	3	$-3+4t$	p / 4	1,5
86	4	3	R/4	2,5	$5t+4t^4$	–p / 3	2

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

Окончание табл. 9.1

№ п/п	***m***, кг	***R***, м	***OM***, м	***t*₁, с**	$\boldsymbol{M_z^E(t)}$, **Н · м**	**Начальные условия**	
						φ_0, рад	**ω_0, рад/с**
87	1,5	10	R/3	2,5	$11+4t^2$	$-p/4$	1,5
88	2	4	R/5	3,5	$4+6t^2$	$-p/4$	–1,5
89	0,5	10	R/5	0,5	$3+5t+5t^3$	0	1
90	3	4	R/5	1	$4+4t^2+3t^3$	$p/3$	1,5
91	2	8	3R/7	3,5	$5+3t^2$	$-p/4$	0
92	1,5	10	R/2	1,5	$4+4t^2$	$p/4$	–1
93	2	8	R/4	3,5	$9-3t^4$	$-p/6$	1
94	2	1	R/2	2,5	$6t-4+t^2$	$p/4$	–1,5
95	2,5	5	R	2,5	$1-2t+3t^3$	$-p/3$	2p
96	1,5	9	R/2	1,5	$5-4t+4t^2$	$p/3$	2
97	0,5	8	R/3	3	$1+2t$	$-p$	0
98	4	7	R/4	1,5	$-2+3t+t^3$	0	1
99	3,5	3	R/4	4	$5+6t-t^2$	p	0
100	3,5	7	R/6	4	$3+2t+t^3$	$-p/3$	1

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: $M_z^E(t)=4t-t^2+t^3$ Н · м; m = 2 кг; R = 4 м; $OM = R/3$; t_1 = 2 с; $\varphi_0 = \pi/4$ рад; ω_0 = 0 рад/с.

Решение проведем с использованием основного уравнения динамики вращательного движения [см. (18)]:

$$M_z^E(t) = J_z \mathrm{e}(t), \tag{9.1}$$

где J_z – осевой момент инерции твердого тела, а $\mathrm{e}(t)$ – угловое ускорение тела. Для однородного диска осевой момент инерции определяется выражением

$$J_z = \frac{mR^2}{2}. \tag{9.2}$$

Используя исходные данные, получаем $J_z = mR^2/2 = 16$ кг$\cdot$м^2. Из выражения (9.1) угловое ускорение диска определяется как

$$\mathrm{e}(t) = \frac{M_z^E(t)}{J_z} = \frac{4t-t^2+t^3}{16} = \frac{t}{4} - \frac{t^2}{16} + \frac{t^3}{16}. \tag{9.3}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Угловую скорость определим непосредственным интегрированием:

$$\text{щ}(t) = \int \text{e}(t)\,dt = \int \left(\frac{t}{4} - \frac{t^2}{16} + \frac{t^3}{16} \right) dt =$$

$$= \frac{t^2}{8} - \frac{t^3}{48} + \frac{t^4}{64} + C_1. \qquad (9.4)$$

Константу C_1 вычислим из условия $\text{щ}_0 = 0$ рад/с, откуда

$$\text{щ}(0) = C_1 = 0 \text{ рад/с}. \qquad (9.5)$$

Функцию угла поворота диска определим из (9.4); интегрирование приводит к следующему:

$$\text{ц}(t) = \int \text{щ}(t)\,dt = \int \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t^3}{48} + \frac{t^4}{64} \right) dt =$$

$$= \frac{t^3}{24} - \frac{t^4}{192} + \frac{t^5}{320} + C_2. \qquad (9.6)$$

Условие $\text{ц}_0 = \text{p}/4$ рад окончательно приводит к

$$\text{ц}(t) = \frac{t^3}{24} - \frac{t^4}{192} + \frac{t^5}{320} + \frac{\text{p}}{4}. \qquad (9.7)$$

Кинетическую энергию диска

$$T = \frac{J_z \text{щ}^2(t)}{2} \qquad (9.8)$$

вычислим в момент времени $t_1 = 2$ с: подстановка в (9.4) приводит к значению $\text{щ}(t_1) = 7/12$ рад/с. Из (9.6) для указанного момента времени получаем

$$T = \frac{J_z \text{щ}^2(t_1)}{2} = \frac{16(7/12)^2}{2} \approx 2,7 \text{ Дж}. \qquad (9.9)$$

Работу внешних моментов сил на интервале времени $t \in [0, t_1]$ определим с использованием теоремы об изменении кинетической энергии [см. (4)]:

$$A\left(M_z^E\right) = T(t_1) - T(t = 0). \qquad (9.10)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Поскольку $T(t=0)=0$ Дж, из (9.9) и (9.10) получаем

$$A\left(M_z^E\right)=T(t_1)-T(t=0)=2{,}7 \text{ Дж.} \tag{9.11}$$

Скорость и ускорение точки M вычислим с использованием выражений (9.3) и (9.4). Для скорости точки

$$v_M=\omega OM, \tag{9.12}$$

где $OM=R/3=4/3$ м, в момент времени $t_1=2$ с получаем

$$v_M=\omega(t_1)\ OM\approx 0{,}8 \text{ м/с.} \tag{9.13}$$

Для нормального и тангенциального ускорения точки, соответственно,

$$a_M^n=\omega^2(t_1)\ OM\approx 0{,}5 \text{ м/с}^2,\quad a_M^\tau=\varepsilon(t_1)\ OM=1 \text{ м/с}^2, \tag{9.14}$$

откуда модуль ускорения точки M

$$\left|\vec{a}_M\right|=\sqrt{\left(a_M^n\right)^2+\left(a_M^\tau\right)^2}\approx 1{,}1 \text{ м/с}^2. \tag{9.15}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

ЗАДАЧА № 10

Точка массы m движется на плоскости xoy. Потенциальная энергия точки определяется выражением П = b_1x+b_2y. Указаны начальные условия: $v_x(0)=v_{0x}$; $v_y(0)=v_{0y}$; $x(0)=x_0$; $y(0)=y_0$.

Найти:

1. Силу $\vec{F}(F_x, F_y)$, действующую на точку.

2. Траекторию движения точки и закон движения точки по этой траектории.

3. Кинетическую энергию точки как функцию времени.

Исходные данные приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Исходные данные

№ п/п	Коэффициенты		Начальные условия				m, кг
	b_1, (кг · м)/с^2	b_2, (кг · м)/с^2	x_0, м	y_0, м	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	
1	6	–2	0	5	5	–1	4
2	1	1/2	–1	5	5	3	3
3	2	–1	4	0	0	6	3
4	2	5/3	–4	–2	–2	8	2
5	2	2	1	5	5	1	1
6	3	8	8	4	4	–2	5
7	5	–3	–7	–3	–3	0	4
8	6	8	–7	0	0	4	3
9	1	4/5	8	–1	–1	8	3
10	4	–1	6	–1	–1	5	2
11	4	1	4	–3	–3	0	2
12	3	5	3	1	1	5	5
13	1	8	–7	–1	–1	9	2
14	7	–3	3	2	2	6	1
15	4	4	2	–1	–1	3	5
16	5	7	0	–1	–1	8	2
17	2	5	6	1	1	7	5
18	3	–4	0	3	3	6	1
19	2	–5	0	3	3	3	4
20	6	1	2	4	4	3	1
21	5	–5	1	2	2	–2	5
22	5	–2	–6	–3	–3	8	4
23	4	4	4	–1	–1	3	1
24	2	–5	–4	3	3	–1	5

Библиотека ГГТУ им. П. О. Сухого

Продолжение табл. 10.1

№ п/п	Коэффициенты		Начальные условия				m, кг
	b_1, (кг · м)/с^2	b_2, (кг · м)/с^2	x_0, м	y_0, м	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	
25	7	–2	4	5	5	0	1
26	4	–4	0	3	3	–2	1
27	2	7	–6	5	5	–1	5
28	4	–3	–1	–1	–1	6	1
29	3	–3	4	5	5	4	2
30	7	7	–1	5	5	4	5
31	2	–2	–3	0	0	9	2
32	5	–7	7	1	1	9	4
33	3	–2	2	–2	–2	5	1
34	1	–1	2	2	2	–1	3
35	6	8	1	4	4	1	5
36	3	–3	4	0	0	8	5
37	5	8	7	1	1	8	3
38	6	6	–6	–1	–1	–2	5
39	5	–3	6	3	3	8	1
40	6	6	–2	–3	–3	7	3
41	1	0	0	2	2	5	4
42	0	2	4	0	0	4	1
43	–5	–6	5	–3	–3	4	2
44	–4	1	–2	1	1	6	1
45	0	4	–5	0	0	1	5
46	4	–2	–1	–2	–2	9	1
47	–1	6	0	–1	–1	–2	3
48	2	8	5	5	5	2	4
49	5	6	0	3	3	0	1
50	–5	–1	–2	–3	–3	7	3
51	–2	6	3	–2	–2	1	3
52	3	–2	0	0	0	2	2
53	–3	–7	5	1	1	5	4
54	–1	–6	–5	–3	–3	2	1
55	1	–5	–2	2	2	8	3
56	5	–6	3	3	3	–2	3
57	3	5	–7	–1	–1	9	1
58	–1	1	–4	4	4	–2	2
59	1	–1	–4	5	5	1	4
60	–2	–3	5	5	5	5	3
61	–4	–6	6	–3	–3	0	4
62	–5	–5	6	5	5	8	3
63	0	–3	–6	1	1	4	2
64	3	4	–6	–2	–2	0	4

Библиотека ГГТУ www.gstu.by

Окончание табл. 10.1

№ п/п	Коэффициенты		Начальные условия				m, кг
	b_1, (кг · м)/с^2	b_2, (кг · м)/с^2	x_0, м	y_0, м	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	
65	2	–5	7	–3	–3	6	2
66	–3	7	–7	5	5	5	1
67	2	7	5	1	1	5	1
68	–5	2	–2	2	2	0	3
69	–1	6	7	5	5	8	1
70	–3	1	3	-3	–3	–2	1
71	3	4	5	2	2	2	3
72	4	1	0	3	3	8	2
73	–3	–6	–4	5	5	8	2
74	5	8/7	8	–1	–1	2	3
75	–2	3	–5	1	1	–1	5
76	1	0	–1	0	0	3	1
77	4	1	–1	–3	–3	4	4
78	–3	–1	–4	4	4	6	3
79	–1	1	–6	3	3	4	1
80	0	4	8	–3	–3	6	4
81	1/3	8	–7	–2	–2	5	4
82	1	1	6	2	2	0	1
83	3	7	3	2	2	7	5
84	2	7	0	3	3	–1	2
85	–3	2	0	1	1	5	3
86	2	4	–7	0	0	–2	3
87	–5	–7	4	–2	–2	7	2
88	4	4	–4	–3	–3	–2	1
89	–4/5	1	–5	0	0	3	5
90	3/2	–3	2	1	1	8	1
91	5	–7	0	3	3	0	2
92	6	–1	–2	–1	–1	7	1
93	1	7	–1	–2	–2	–1	2
94	0	–3	–7	4	4	6	5
95	–5	–1	–7	5	5	8	4
96	–4	7	–7	4	4	4	5
97	0	7	–3	5	5	–2	4
98	4	–2	6	4	4	3	4
99	3	4	4	5	5	7	1
100	6/5	5	–6	–2	–2	8	5

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: $\Pi = -5x + 3y$; $v_{0x} = 3$ м/с; $v_{0y} = 4$ м/с; $x_0 = -3$ м; $y_0 = 1$ м; $m = 2$ кг.

Воспользуемся выражением

$$\vec{F} = -grad\ \Pi = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{k} \right), \tag{10.1}$$

устанавливающим связь между вектором силы и потенциальной энергией точки. Выражение $\Pi = -5x + 3y$ приводит к компонентам силы $\vec{F}$:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-5x + 3y\right) = 5 \text{ Н}; \tag{10.2}$$

$$F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-5x + 3y\right) = -3 \text{ Н}. \tag{10.3}$$

Определение компонент скорости проведем с использованием второго закона Ньютона (1). Для рассматриваемого примера

$$v_x(t) = \int a_x(t)\ dt = \int \frac{F_x}{m}\ dt = \frac{5}{2}t + C_1; \tag{10.4}$$

$$v_y(t) = \int a_y(y)\ dt = \int \frac{F_y}{m}\ dt = -\frac{3}{2}t + C_2. \tag{10.5}$$

Константы интегрирования определим из начальных условий. С учетом значений v_{0x} и v_{0y} из (10.4) и (10.5) получаем:

$$v_x(0) = 3 \text{ м/с} \to C_1 = 3 \text{ м/с};\ v_x(0) = 4 \text{ м/с} \to C_2 = 4 \text{ м/с}. \tag{10.6}$$

Аналогично для координат точки получаем

$$x(t) = \int v_x(t)\ dt = \int \left(\frac{5}{2}t + 3 \right) dt = \frac{5}{4}t^2 + 3t + C_3, \tag{10.7}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

откуда

$$x(0) = -3 \text{ м} \to C_3 = -3 \text{ м}$$

и

$$y(t) = \int y_x(t)\ dt = \int \left(-\frac{3}{2}t + 4 \right) dt = -\frac{3}{4}t^2 + 4t + C_4;$$

$$y(0) = 1 \text{ м} \to C_4 = 1 \text{ м}. \tag{10.8}$$

Уравнение траектории точки $y(x)$ определим из уравнения

$$x(t) = \frac{5}{4}t^2 + 3t - 3, \tag{10.9}$$

откуда

$$t = \frac{2}{5}\left(\sqrt{5x + 24} - 3 \right), \quad t \geq 0. \tag{10.10}$$

Подстановка выражения (10.10) в уравнение $y(t)$ после некоторых упрощений приводит к следующему:

$$y(x) = \frac{1}{25}\left(-15x + 58\sqrt{5x + 24} - 194 \right). \tag{10.11}$$

Кинетическая энергия точки определяется выражением

$$T = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v_x^2(t) + v_y^2(t) \right). \tag{10.12}$$

Для рассматриваемого примера $v_x(t) = \frac{5}{2}t + 3;\ v_y(t) = -\frac{3}{2}t + 4.$ Подстановка $v_x(t)$ и $v_y(t)$ в выражение (10.12) приводит к окончательному ответу:

$$T = \frac{m}{2}\left(v_x^2(t) + v_y^2(t) \right) = \frac{1}{2}\left(17t^2 + 6t + 50 \right). \tag{10.13}$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

ЗАДАЧА № 11

Точка массы m движется на плоскости XOY. Потенциальная энергия точки определена выражением $\Pi = b_1 x^2 + b_2 y^2$. Указаны начальные условия: $v_x(0) = v_{0x}$; $v_y(0) = v_{0y}$; $x(0) = x_0$; $y(0) = y_0$.

Найти:

1. Силу $\vec{F}(F_x, F_y)$, действующую на точку.
2. Закон движения точки $x(t)$ и $y(t)$.
3. Кинетическую энергию точки как функцию времени.

Исходные данные приведены в табл. 11.1.

Таблица 11.1

Исходные данные

№ п/п	Коэффициенты		Начальные условия				m, кг
	b_1, (кг · м)/с^2	b_2, (кг · м)/с^2	x_0, м	y_0, м	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	
1	2	–2	0	5	5	–1	1
2	1	1/3	–1	5	5	3	3
3	2	–1	4	0	0	6	4
4	2	5/3	–4	–2	–2	8	1
5	1	2	1	5	5	1	2
6	3	8	8	4	4	–2	1
7	3	–1	–7	–3	–3	0	5
8	6	–2	–7	0	0	4	1
9	1	4/5	8	–1	–1	8	3
10	4	–1	6	–1	–1	5	2
11	3	1	4	–3	–3	0	2
12	3	5	3	1	1	5	5
13	1	8	–7	–1	–1	9	2
14	–3	–3	3	2	2	6	1
15	4	4	2	–1	–1	3	5
16	5	7	0	–1	–1	8	2
17	2	5	6	1	1	7	5
18	3	–2	0	3	3	6	1
19	2	–5	0	3	3	3	4
20	6	1	2	4	4	3	1
21	5	–5	1	2	–	–2	5
22	5	–2	–6	–3	–	8	4
23	4	4	4	–1	–1	3	1
24	2	–5	–4	3	3	–1	5

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Продолжение табл. 11.1

№ п/п	**Коэффициенты**		**Начальные условия**				***m*, кг**
	b_1, (кг · м)/с^2	b_2, (кг · м)/с^2	x_0, м	y_0, м	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	
25	7	–2	4	5	5	0	1
26	1	–4	0	3	3	–2	1
27	2	7	–6	5	5	–1	5
28	4	–3	–1	–1	–1	6	1
29	3	–3	4	5	5	4	2
30	7	7	–1	5	5	4	5
31	2	–2	–3	0	0	9	2
32	5	–7	7	1	1	9	4
33	3	–2	2	–2	–2	5	1
34	1	–1	2	2	2	–1	3
35	6	8	1	4	4	1	5
36	3	–3	4	0	0	8	5
37	5	8	7	1	1	8	3
38	6	6	–6	–1	–1	–2	5
39	5	–3	6	3	3	8	1
40	6	6	–2	–3	–3	7	3
41	1	0	0	2	2	5	4
42	0	2	4	0	0	4	1
43	–5	–6	5	–3	–3	4	2
44	–4	1	–2	1	1	6	1
45	0	4	–5	0	0	1	5
46	4	–2	–1	–2	–2	9	4
47	–1	6	0	–1	–1	–2	1
48	2	8	5	5	5	2	3
49	5	6	0	3	3	0	5
50	–5	–1	–2	–3	–3	7	5
51	–2	6	3	–2	–2	1	3
52	3	–2	0	0	0	2	4
53	–3	–7	5	1	1	5	1
54	–1	–6	–5	–3	–3	2	1
55	1	–5	–2	2	2	8	3
56	5	–6	3	3	3	–2	3
57	3	5	–7	–1	–1	9	1
58	–1	1	–4	4	4	–2	2
59	1	–1	–4	5	5	1	4
60	–2	–3	5	5	5	5	3
61	–4	–6	6	–3	–3	0	4
62	–5	–5	6	5	5	8	3
63	0	–3	–6	1	1	4	2
64	3	4	–6	–2	–2	0	4

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

№ п/п	Коэффициенты		Начальные условия				m, кг
	b_1, (кг · м)/с^2	b_2, (кг · м)/с^2	x_0, м	y_0, м	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	
65	2	–5	7	–3	–3	6	2
66	–3	7	–7	5	5	5	1
67	2	7	5	1	1	5	1
68	–5	2	–2	2	2	0	3
69	–1	6	7	5	5	8	1
70	–3	1	3	–3	–3	–2	1
71	3	4	5	2	2	2	3
72	4	1	0	3	3	8	2
73	–3	–6	–4	5	5	8	2
74	5	8/7	8	–1	–1	2	3
75	–2	3	–5	1	1	–1	5
76	1	0	–1	0	0	3	1
77	4	1	–1	–3	–3	4	4
78	–3	–1	–4	4	4	6	3
79	–1	1	–6	3	3	4	1
80	0	4	8	–3	–3	6	4
81	1/3	8	–7	–2	–2	5	4
82	1	1	6	2	2	0	1
83	3	7	3	2	2	7	5
84	2	7	0	3	3	–1	2
85	–3	2	0	1	1	5	3
86	2	4	–7	0	0	–2	3
87	–5	–7	4	–2	–2	7	2
88	4	4	–4	–3	–3	–2	1
89	–4/5	1	–5	0	0	3	5
90	3/2	–3	2	1	1	8	1
91	5	–7	0	3	3	0	2
92	6	–1	–2	–1	–1	7	1
93	1	7	–1	–2	–2	–1	2
94	0	–3	–7	4	4	6	5
95	–5	–1	–7	5	5	8	4
96	–4	7	–7	4	4	4	5
97	0	7	–3	5	5	–2	4
98	4	–2	6	4	4	3	4
99	3	4	4	5	5	7	1
100	6/5	5	–6	–2	–2	8	5

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: $\Pi = 2x^2 - y^2$; $v_{0x} = 4$ м/с; $v_{0y} = 1$ м/с; $x_0 = 2$ м; $y_0 = -1$ м; $m = 1$ кг.

Решение проведем с использованием соотношения (см. задачу 10):

$$\vec{F} = -\text{grad}\,\Pi = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{k}\right). \qquad (11.1)$$

В изучаемом примере выражение $\Pi = 2x^2 - y^2$ приводит к следующим выражениям для компонент сил:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2 - y^2\right) = -4x;$$

$$F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2 - y^2\right) = 2y. \qquad (11.2)$$

Дальнейшее решение будем проводить с использованием второго закон Ньютона (1) в компонентной записи:

$$F_x = m\ddot{x}(t); \;\; F_y = m\ddot{y}(t). \qquad (11.3)$$

Подстановка выражений (11.2) в (11.3) проводит к следующим дифференциальным уравнениям движения точки:

$$\ddot{x}(t) = -4x(t); \quad \ddot{y}(t) = 2y(t). \qquad (11.4)$$

Процедура решения уравнений (11.4) подробно изложена в задаче 7. Для оси OX решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0 \qquad (11.5)$$

определяется выражением

$$x(t) = A\sin\left(\text{щ}\, t + \text{ц}_0\right). \qquad (11.6)$$

Использование (10) с учетом $\text{щ} = 2$ рад/с приводит к значениям $A \approx 2{,}8$ м и $\text{ц}_0 \approx 0{,}79$ рад. Окончательное решение для уравнения (11.5) примет следующий вид:

$$x(t) = 2{,}8\sin\left(2t + 0{,}79\right). \qquad (11.7)$$

Решение дифференциального уравнения для оси OY

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$\ddot{y}(t) - 2y(t) = 0 \qquad (11.8)$$

будем искать в виде

$$y(t) = C_1 e^{\text{л}_1 t} + C_2 e^{\text{л}_2 t}, \qquad (11.9)$$

где для изучаемого случая $\text{л}_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Определение констант интегрирования $C_{1,2}$ проведем с использованием начальных условий. Вычисление скорости точки

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = \frac{d}{dt}(C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}) = \sqrt{2}C_1 e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}C_2 e^{-\sqrt{2}t} \qquad (11.10)$$

с последующим решением системы уравнений

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = -1; \\ v_y(0) = \sqrt{2}C_1 - \sqrt{2}C_2 = 1, \end{cases} \qquad (11.11)$$

приводит к значениям $C_1 \approx -0{,}15$ и $C_2 \approx -0{,}85$. Окончательный ответ для дифференциального уравнения (11.8) примет следующий вид:

$$y(t) = -0{,}15\ e^{\sqrt{2}t} - 0{,}85\ e^{-\sqrt{2}t}. \qquad (11.12)$$

Кинетическую энергию точки

$$T = \frac{m}{2}\left(v_x^2(t) + v_y^2(t)\right) \qquad (11.13)$$

определим с использованием выражений (11.7) и (11.12); вычисление производных

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(2{,}8\sin\left(2t + 0{,}79\right)\right) = 5{,}6\cos\left(2t + 0{,}79\right) \qquad (11.14)$$

и

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\left(-0{,}15\ e^{\sqrt{2}t} - 0{,}85\ e^{-\sqrt{2}t}\right) = 1{,}20e^{-\sqrt{2}t} - 0{,}21e^{\sqrt{2}t} \qquad (11.15)$$

после некоторых упрощений приводит к следующему:

$$T = \frac{1}{2}\left(\left(2{,}8\sin\left(2t + 0{,}79\right)\right)^2 + \left(1{,}20e^{-\sqrt{2}t} - 0{,}21e^{\sqrt{2}t}\right)^2\right) =$$

$$= 7{,}59 + 7{,}84\cos(4t + 1{,}58) + 0{,}74\ \cos h\left(2\sqrt{2}t\right) - 0{,}70\sin h\left(2\sqrt{2}t\right). \qquad (11.16)$$

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

ЗАДАЧА № 12

Составить уравнение Лагранжа второго рода. Изучить движение механической системы с одной степенью свободы с кинетической $T = av_x^2$ и потенциальной энергией $\Pi = bx + c$. Проинтегрировать полученное уравнение с учетом начальных условий при $t = 0$ $x(0) = x_0$ и $v_x(0) = v_{0x}$.

Исходные данные приведены в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Исходные данные

№ п/п	a, кг	b, (кг · м)/с^2	c, (кг · м^2)/с^2	Начальные условия	
				x_0, м	v_{0x}, м/с
1	4/7	11	–4	3	4
2	1	13	–5	2,5	1,5
3	5/6	1	1	0,5	2
4	5	13	–3	3,5	–0,5
5	2	11	6	1,5	3,5
6	1	9	1	1	0,5
7	9/2	2	–6	0,5	0
8	7/2	11	1	1	–0,5
9	2/3	8	2	1,5	–0,5
10	7/2	5	–2	1	0,5
11	1/2	8	5	–0,5	0,5
12	5/2	4	3	0	0,5
13	7/2	5	2	–0,5	–1
14	1/2	1	1	2,5	1,5
15	5/6	1	–6	–0,5	1
16	2/3	14	–1	2,5	–2
17	1/2	5	0	0	2,5
18	3	14	2	1,5	0,5
19	4	5	–3	2	–0,5
20	2	4	0	–0,5	1
21	7/2	11	3	0	–0,5
22	5/2	9	–4	0,5	3
23	5/6	12	–3	0	0,5
24	3	8	–6	3,5	–1
25	2	3	2	–1	3
26	7/2	10	4	2	1
27	5/2	11	–5	3	1,5
28	5	5	–6	3,5	0,5

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Продолжение табл. 12.1

№ п/п	a, кг	b, (кг · м)/с^2	c, (кг · м^2)/с^2	Начальные условия	
				x_0, м	v_{0x}, м/с
29	1	5	3	3	–2
30	5/2	8	0	–0,5	2,5
31	9/2	10	–2	3,5	2,5
32	2	7	–5	–0,5	1
33	5	8	4	0,5	–0,5
34	2	5	0	0,5	2,5
35	½	14	–4	0	1
36	2/3	7	5	1	0,5
37	5/2	11	2	3,5	1
38	7/2	3	0	2	0,5
39	5/6	6	6	2,5	3,5
40	4	10	5	3	1,5
41	5/2	8	0	1,5	0
42	5	12	2	0,5	–1,5
43	½	12	6	–1	4
44	4	5	1	2,5	–1,5
45	7/2	3	6	–1	4
46	2/3	1	3	3,5	1,5
47	2	3	2	1,5	3
48	2/3	7	4	0	–1,5
49	½	4	–3	3	2,5
50	5/2	10	–6	0,5	2
51	5/6	6	1	3,5	1,5
52	5/2	10	–1	0	3,5
53	2/3	8	6	1,5	0,5
54	½	1	–6	0,5	–1
55	7/2	5	2	2,5	–1
56	7/2	4	–6	2	4
57	9/2	6	3	0,5	1
58	2/3	8	2	0,5	3
59	1	13	5	0,5	1,5
60	5/2	12	–4	3,5	–1
61	½	5	0	2,5	–0,5
62	7/2	6	3	2,5	1
63	½	5	–2	1	–0,5
64	1	14	5	–0,5	0,5
65	5	12	1	0,5	3,5
66	1	11	0	2	3,5
67	1	12	–4	4	3,5
68	2/3	12	–4	1	2,5
69	3	9	–2	2,5	–1

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Окончание табл. 12.1

№ п/п	*a*, кг	*b*, (кг · м)/с^2	*c*, (кг · м^2)/с^2	Начальные условия	
				x_0, м	v_{0x}, м/с
70	4	5	–3	–0,5	0
71	7/2	3	6	1,5	4
72	5/6	10	5	4	–2
73	3	7	0	4	0,5
74	3	2	–5	4	3
75	2	10	–6	–1	–0,5
76	5	2	4	-1	0
77	9/2	9	1	–0,5	0,5
78	1/2	2	–6	–0,5	1,5
79	2/3	13	–5	–1	1,5
80	5/2	11	–1	3	–1,5
81	7/2	5	6	2	0
82	1	12	–5	1,5	–1,5
83	2	7	–3	4	3
84	9/2	9	0	3	1,5
85	2/3	4	5	2	–1,5
86	3	1	5	–0,5	–0,5
87	2/3	14	–4	0	–1,5
88	7/2	6	6	–0,5	3
89	1/2	8	–3	–0,5	–2
90	2	13	5	2,5	2,5
91	3	4	–4	2	–1,5
92	5	12	6	1,5	–1
93	7/2	10	1	1,5	–0,5
94	4	9	6	–0,5	–1
95	1/2	5	–4	1	1
96	1/2	11	–6	1,5	0
97	1/2	4	6	1	–1,5
98	2	8	–3	1	0
99	5/2	3	–3	3	–0,5
100	1/2	11	4	–1	2

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: a = 5/3 кг; b = 20 (кг · м)/с^2; c = –5 (кг · м^2)/с^2; x_0 = 4 м; v_{0x} = 1 м/с.

Получим уравнение движения точки с одной степенью свободы исходя из уравнения Лагранжа второго рода [см. (19)]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \qquad (12.1)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

где Q_x – обобщенная сила; $Q_x = -\partial \Pi / \partial x$. Определим обобщенную силу в изучаемом примере:

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(20x - 5\right) = -20. \tag{12.2}$$

Вычисление производных кинетической энергии $T = 5v_x^2/3 = 5\dot{x}^2/3$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{10}{3}\dot{x}(t); \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{10}{3}\ddot{x}(t) \tag{12.3}$$

с подстановкой (12.2) и (12.3) в (12.1) приводит к уравнению движения:

$$10/3\,\ddot{x}(t) = -20. \tag{12.4}$$

Из (12.4) нетрудно получить уравнение

$$\ddot{x}(t) = -6, \tag{12.5}$$

соответствующее случаю равноускоренного движения точки. Скорость точки определим непосредственным интегрированием выражения (12.5):

$$v_x(t) = \int \ddot{x}(t)dt = -\int 6\,dt = -6t + C_1, \tag{12.6}$$

где C_1 – константа интегрирования. С учетом начального условия $v_{0x} = 1$ м/с из (12.6) получаем $v_x(0) = C_1 = 1$. Для координаты точки аналогично:

$$x(t) = \int v_x(t)dt = \int\left(-6t + 1\right)dt = -3t^2 + t + C_2, \tag{12.7}$$

где C_2 определяется из начального условия $x_0 = 4$ м. Расчет из (12.7) приводит к значению $x(0) = C_2 = 4$. Окончательный ответ в изучаемом примере запишется в виде

$$x(t) = -3t^2 + t + 4. \tag{12.8}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

ЗАДАЧА № 13

Составить уравнение Лагранжа второго рода. Изучить движение механической системы с одной степенью свободы с кинетической $T = av_x^2$ и потенциальной энергией $\Pi = bx^2 + cx$. Проинтегрировать полученное уравнение с учетом начальных условий при $t = 0$; $x(0) = x_0$ и $v_x(0) = v_{0x}$.

Исходные данные приведены в табл. 13.1.

Таблица 13.1

Исходные данные

№ п/п	*a*, кг	*b*, кг/с^2	*c*, (кг · м)/с^2	Начальные условия	
				x_0, м	v_{0x}, м/с
1	4/7	11	–4	3	4
2	1	13	–5	2,5	1,5
3	5/6	1	1	0,5	2
4	5	13	–3	3,5	–0,5
5	2	11	6	1,5	3,5
6	1	9	1	1	0,5
7	9/2	2	–6	0,5	0
8	7/2	11	1	1	–0,5
9	2/3	8	2	1,5	–0,5
10	7/2	5	–2	1	0,5
11	1/2	8	5	–0,5	0,5
12	5/2	4	3	0	0,5
13	7/2	5	2	–0,5	–1
14	1/2	1	1	2,5	1,5
15	5/6	1	–6	–0,5	1
16	2/3	14	–1	2,5	-2
17	1/2	5	0	0	2,5
18	3	14	2	1,5	0,5
19	4	5	–3	2	–0,5
20	2	4	0	–0,5	1
21	7/2	11	3	0	–0,5
22	5/2	9	–4	0,5	3
23	5/6	12	–3	0	0,5
24	3	8	–6	3,5	–1
25	2	3	2	–1	3
26	7/2	10	4	2	1
27	5/2	11	–5	3	1,5
28	5	5	–6	3,5	0,5

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Продолжение табл. 13.1

№ п/п	*a*, кг	*b*, кг/с^2	*c*, (кг · м)/с^2	Начальные условия	
				x_0, м	v_{0x}, м/с
29	1	5	3	3	–2
30	5/2	8	0	–0,5	2,5
31	9/2	10	–2	3,5	2,5
32	2	7	–5	–0,5	1
33	5	8	4	0,5	–0,5
34	2	5	0	0,5	2,5
35	1/2	14	–4	0	1
36	2/3	7	5	1	0,5
37	5/2	11	2	3,5	1
38	7/2	3	0	2	0,5
39	5/6	6	6	2,5	3,5
40	4	10	5	3	1,5
41	5/2	8	0	1,5	0
42	5	12	2	0,5	–1,5
43	1/2	12	6	–1	4
44	4	5	1	2,5	–1,5
45	7/2	3	6	–1	4
46	2/3	1	3	3,5	1,5
47	2	3	2	1,5	3
48	2/3	7	4	0	–1,5
49	1/2	4	–3	3	2,5
50	5/2	10	–6	0,5	2
51	5/6	6	1	3,5	1,5
52	5/2	10	–1	0	3,5
53	2/3	8	6	1,5	0,5
54	1/2	1	–6	0,5	–1
55	7/2	5	2	2,5	–1
56	7/2	4	–6	2	4
57	9/2	6	3	0,5	1
58	2/3	8	2	0,5	3
59	1	13	5	0,5	1,5
60	5/2	12	–4	3,5	–1
61	1/2	5	0	2,5	–0,5
62	7/2	6	3	2,5	1
63	1/2	5	–2	1	–0,5
64	1	14	5	–0,5	0,5
65	5	12	1	0,5	3,5
66	1	11	0	2	3,5
67	1	12	–4	4	3,5
68	2/3	12	–4	1	2,5
69	3	9	–2	2,5	–1

Библиотека ГГТУ им. П. О. Сухого

Окончание табл. 13.1

№ п/п	*a*, кг	*b*, кг/с^2	*c*, (кг · м)/с^2	Начальные условия	
				x_0, м	v_{0x}, м/с
70	4	5	–3	–0,5	0
71	7/2	3	6	1,5	4
72	5/6	10	5	4	-2
73	3	7	0	4	0,5
74	3	2	–5	4	3
75	2	10	–6	–1	–0,5
76	5	2	4	–1	0
77	9/2	9	1	–0,5	0,5
78	1/2	2	–6	–0,5	1,5
79	2/3	13	–5	–1	1,5
80	5/2	11	–1	3	–1,5
81	7/2	5	6	2	0
82	1	12	–5	1,5	–1,5
83	2	7	–3	4	3
84	9/2	9	0	3	1,5
85	2/3	4	5	2	–1,5
86	3	1	5	–0,5	–0,5
87	2/3	14	–4	0	–1,5
88	7/2	6	6	–0,5	3
89	1/2	8	–3	–0,5	–2
90	2	13	5	2,5	2,5
91	3	4	–4	2	–1,5
92	5	12	6	1,5	–1
93	7/2	10	1	1,5	–0,5
94	4	9	6	–0,5	–1
95	1/2	5	–4	1	1
96	1/2	11	–6	1,5	0
97	1/2	4	6	1	–1,5
98	2	8	–3	1	0
99	5/2	3	–3	3	–0,5
100	1/2	11	4	–1	2

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: a = 7/2 кг; b = 8 кг/с^2; c = –6 (кг · м)/с^2; x_0 = 3 м; v_{0x} = 1 м/с.

Получим уравнение движения точки с одной степенью свободы исходя из уравнения Лагранжа 2-го рода [см. (19)]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \qquad (13.1)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

где Q_x – обобщенная сила; $Q_x = -\partial \Pi / \partial x$. Обобщенная сила в изучаемом примере определяется выражением

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(8x^2 - 6x\right) = -16x + 6. \tag{13.2}$$

Вычисление частных производных кинетической энергии $T = 7v_x^2/2 = 7\dot{x}^2/2$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 7\dot{x}(t); \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 7\ddot{x}(t) \tag{13.3}$$

с последующей подстановкой (13.2) и (13.3) в (13.1) приводит к уравнению движения

$$7\ddot{x}(t) = -16x(t) + 6. \tag{13.4}$$

Из (13.4) нетрудно получить уравнение

$$\ddot{x}(t) + \frac{16}{7}x(t) = \frac{6}{7}, \tag{13.5}$$

соответствующее случаю гармонических колебаний (см. задачу 7). Решение уравнения (13.5) будем искать как сумму общего $x_{об.}(t)$ и частного $x_{ч.}(t)$ решений

$$x(t) = x_{об.}(t) + x_{ч.}(t). \tag{13.6}$$

Решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) + \frac{16}{7}x(t) = 0 \tag{13.7}$$

будем искать в виде [сравним с (9)]

$$x(t) = C_1 \cos(\text{щ}t) + C_2 \sin(\text{щ}t), \tag{13.8}$$

где $\text{щ} = \sqrt{16/7} \approx 1{,}5$ рад/с. Частное решение определим исходя из правой части (13.5): искомое выражение примет вид $x_ч(t) = \tilde{A}$. Подстановка $x_ч(t)$ в уравнение (13.5) приводит к соотношению

$$\frac{16}{7}\tilde{A} = \frac{6}{7}, \tag{13.9}$$

откуда $\tilde{A} = 3/8$. Из (13.6) и (13.8) получаем

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{3}{8}. \qquad (13.10)$$

Константы C_1, C_2 определим из начальных условий. Вычисление производной (13.10)

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = C_1 \omega \sin(\omega t) - C_2 \cos(\omega t) \qquad (13.11)$$

с учетом значений $\omega = 1,5$ рад/с, $x_0 = 3$ м, $v_{0x} = 1$ м/с приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x(0) = \dfrac{3}{8} + C_1 = 3; \\ v_x(0) = 1,5C_2 = 1, \end{cases} \qquad (13.12)$$

откуда $C_1 = 2,6$ и $C_2 \approx 0,7$. Решение уравнения (13.5) запишется в виде

$$x(t) = 2,6\cos(1,5t) + 0,7\sin(1,5t) + \frac{3}{8}. \qquad (13.13)$$

В заключение отметим, что выражение (13.13) можно привести к виду (9); вводя обозначения $C_1 = A\sin\varphi_0$ и $C_2 = A\cos\varphi_0$, получаем:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \approx 2,70 \text{ м}; \ \varphi_0 = \arctan\left(\frac{C_1}{C_2}\right) \approx 1,3 \text{ рад}, \qquad (13.14)$$

подстановка (13.14) в (13.10) приводит к искомому ответу

$$x(t) = 2,7\sin(1,5t + 1,3) + \frac{3}{8}. \qquad (13.15)$$

График колебательного процесса (13.15) с $x_0 > 0$, $v_{0x} > 0$ соответствует рис. 1, *а*.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Литература

1. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики : учебник / А. А. Яблонский. – 6-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 1984. – 343 с.

2. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики : учеб. пособие / Н. Н. Бухгольц. – СПб. : Лань, 2021. – Ч. 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки. – 448 с.

3. Савчук, В. П. Теоретическая механика : учебник / В. П. Савчук, Д. Г. Медведев, О. Н. Вярьвильская. – Минск : БГУ, 2016 г. – 232 с.

4. Ольховский, И. И. Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – СПб. : Лань, 2009. – 576 с.

5. Теоретическая механика : учебник / С. В. Болотин [и др.]. – М. : Академия, 2010. – 423 с.

6. Бутенин, Н. В. Введение в теорию нелинейных колебаний : учеб. пособие / Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. – М. : Наука, 1976. – 384 с.

7. Николаи, Е. Л. Теоретическая механика : учебник / Е. Л. Николаи. – 12-е изд., стереотип. – М. : Гостехиздат, 1957. – 484 с.

8. Чигарев, А. В. Курс теоретической механики : учеб. пособие / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. – Минск : Новое знание, 2010. – 397 с.

9. Зверович, Э. И. Вещественный и комплексный анализ : учеб. пособие : в 6 т. / Э. И. Зверович. – Минск : Выш. шк., 2008. – Т. 6. Теория аналитических функцийкомплексного переменного. – 319 с.

10. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2010. – 416 с.

11. Гантмахер, Ф. Р. Лекции по аналитической механике : учеб. пособие / Ф. Р. Гантмахер ; под ред. Е. С. Пятницкого. – 3-е изд. – М. : Физматлит, 2005. – 264 с.

12. Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения : справ. пособие к решению задач / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск : Тетра-Системс, 2006. – 416 с.

13. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М, Гусак, Е. А. Бричкова. – 7-е изд. – Минск : Тетра-Системс, 2006. – 640 с.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Содержание

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Шабловский Олег Никифорович
Гавриш Вадим Юрьевич
Иноземцева Наталья Владимировна

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ДИНАМИКА

Практикум
для студентов технических специальностей
дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *О. С. Ковалёва*
Компьютерная верстка *И. П. Минина*

Подписано в печать 13.10.23.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,79.
Изд. № 10.
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого