Анализ таблицы 1 и рисунка 4 показывает, что теоретически возможно как опережение, так и отставание динамической скорости управляющего момента по отношению к самому моменту.

Список литературы

1 **Покатилов, А.Е.** Биодинамические исследования спортивных упражнений в условиях упругой опоры : монография / А.Е. Покатилов, В.И. Загревский, Д.А. Лавшук. – Минск : Издательский центр БГУ, 2008. – 291 с.

2 **Воронович, Ю.В.** Биомеханика тяжелоатлетических упражнений : монография / Ю.В. Воронович, Д.А. Лавшук, В.И. Загревский. – М-во внутр. дел Респ. Беларусь, учреждение образования «Могилевский институт Министерства внутренних дел Республики Беларусь». – Могилев : Могилев. институт МВД, 2015. – 196 с.

УДК 378.147:517.956.225

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ПРИ ПОДГОТОВКЕ ИНЖЕНЕРОВ-ЭНЕРГЕТИКОВ

Д.В. КОМНАТНЫЙ
Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, г. Гомель

Решение разнообразных инженерных проблем энергетики и электротехники связано с расчетом электрических, тепловых, магнитных статических полей. Для выполнения расчетов необходимо поставить и решить задачу математической физики для уравнения Лапласа с заданными граничными условиями. Одним из фундаментальных методов решения такой задачи является метод разделения переменных. Поэтому для подготовки квалифицированного инженера-энергетика необходимо обучение применению указанного метода с упором на постановку и решение задач математической физики.

В настоящее время раздел о решении уравнения Лапласа включен в курсы теоретических основ электротехники [1]. Также разработаны спецкурсы по дифференциальным уравнениям математической физики в электротехнике [2]. Указанные курсы нельзя признать удачными. В [1] и [2] не изложены условия применимости метода разделения переменных, не объясняется общая схема метода, не уделяется внимание заданию граничных условий и методам построения расчетных моделей. Следовательно, полноценное обучение специалистов становится невозможным.

Специфика деятельности инженера заключается в необходимости решения практических задач и получения расчетных соотношений для определения характеристик поля в конструкции. Для ускорения получения расчетных соотношений в [3] предложены специальные таблицы для решения уравнения Лапласа в двумерных и трехмерных областях методом разделения переменных и методом конечных интегральных преобразований. Поэтому в докладе предлагается при обучении инженеров-энергетиков основываться на использовании табулированных математических соотношений метода разделения переменных. Однако при этом обучающиеся должны усвоить и твердо знать: условия применимости метода разделения переменных, схему метода, допускающие разделение переменных системы координат, способы задания граничных условий. Также необходимо владение основными понятиями метода: собственные числа, собственные функции, функции частного решения, квадрат нормы собственных функций [3]. Только такие знания позволят обучающимся овладеть навыками уверенного пользования таблицами для решения уравнения Лапласа.

Метод разделения переменных в предлагаемом уровне изложения и освоения, адаптированном к практической деятельности, позволяет решить весьма значительный круг модельных задач. В качестве примера в докладе рассматривается следующая задача математической физики.

Область D заключена в проводящей полукруглой оболочке радиуса c. Внутри оболочки область ограничена цилиндрической проводящей оболочкой радиуса a. Расстояние между центрами оболочек равно h. Размеры оболочек сравнимы. Длина оболочек такова, что поле в области D можно считать плоскопараллельным.

Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0$$

в области D, задаваемой в биполярной системе координат α, β с граничными условиями на граничных поверхностях [3]

$$\Gamma_1 \quad \alpha_1 = 0\,;\ \Gamma_2 \quad \alpha_2 = \operatorname{Arch}\frac{h}{a}\,;$$

$$\Gamma_3 \quad \beta_1 = +\frac{\pi}{2}\,;\ \Gamma_4 \quad \beta_2 = -\frac{\pi}{2}\,.$$

$$u\Big|_{\Gamma_1} = U_0\,;\ u\Big|_{\Gamma_2} = U_0\,\frac{U_1}{U_0}\,;\ u\Big|_{\Gamma_3} = U_0\,;\ u\Big|_{\Gamma_4} = U_0\,.$$

Для решения поставленной задачи необходимо выполнить суперпозицию решений двух вспомогательных задач [3]:

– для основной переменной α найти решение уравнения Лапласа при граничных условиях

$$u\Big|_{\Gamma_1}=0\,;\; u\Big|_{\Gamma_2}=0\,;\; u\Big|_{\Gamma_3}=U_0\,;\; u\Big|_{\Gamma_4}=U_0\,;$$

– для основной переменной β найти решение уравнения Лапласа при граничных условиях

$$u\Big|_{\Gamma_1}=U_0\,;\; u\Big|_{\Gamma_2}=U_0\,\frac{U_1}{U_0}\,;\; u\Big|_{\Gamma_3}=0\,;\; u\Big|_{\Gamma_4}=0\,.$$

По таблицам, приведенным в [3], находятся собственные числа, собственные функции, квадрат нормы собственных функций для уравнения Лапласа в биполярной системе координат при заданных граничных поверхностях и граничных условиях. После математических преобразований общей формы решения из [3] получаются решения

первой вспомогательной задачи

$$u_1=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\Re}\frac{1}{2n+1}\,\frac{\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi(2n+1)}{\mathrm{Arch}\,\dfrac{h}{a}}\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)+\mathrm{s\,h}\,\dfrac{\pi(2n+1)}{\mathrm{Arch}\,\dfrac{h}{a}}\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi n}{\mathrm{Arch}\,\dfrac{h}{a}}\right)}\sin\frac{\pi(2n+1)\alpha}{\mathrm{Arch}\,\dfrac{h}{a}}$$

второй вспомогательной задачи

$$u_2=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\,\frac{U_0\mathrm{sh}\left(n\left(\mathrm{Arch}\,\dfrac{h}{a}\right)-\alpha\right)+U_1\,\mathrm{sh}(n\alpha)}{\mathrm{sh}\left(n\mathrm{Arch}\,\dfrac{h}{a}\right)}\sin\left(n\beta+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Из приведенного примера видно, что решение достаточно сложной задачи получается при сокращении объема математических преобразований. Не требуется записывать и решать обыкновенные дифференциальные уравнения для отыскания составляющих решения уравнения Лапласа. Это позволяет сосредоточить внимание на инженерном аспекте задачи, анализе модели конструкции. Следовательно, предлагаемый подход к изучению метода разделения переменных является оптимальным для подготовки инженеров-энергетиков, обладающих требуемым уровнем теоретической и практической подготовки.

Список литературы

1 Теоретические основы электротехники : в 3 т. / К.С. Демирчан [и др.]. – 4-е изд. – СПб. : Питер, 2006.

2 **Аполлонский, С.М.** Дифференциальные уравнения математической физики в электротехнике / С.М. Аполлонский. – СПб. : Питер, 2012. – 352 с.

3 **Иоссель, Ю.Я.** Расчет потенциальных полей в энергетике / Ю.Я. Иоссель. – Л. : Энергия, 1978. – 351 с.

УДК 378.147:512.5

О ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КРИПТОГРАФИИ»

Е.И. ЛОВЕНЕЦКАЯ

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

Современный этап развития криптографии, начавшийся после публикации в 1976 г. У. Диффи и М. Хеллманом концепции асимметричного шифрования, характеризуется широким использованием теоретико-числовых и алгебраических понятий и алгоритмов и интенсивным вовлечением в практику новых математических объектов и теорий. Это приводит к необходимости введения в программы подготовки студентов IT-профиля дисциплин, включающих основы теории чисел, модулярной арифметики, алгебраических структур. Так, в Белорусском государственном технологическом университете (БГТУ) для студентов специальности «Программное обеспечение информационной безопасности мобильных систем» предусмотрен курс «Математические основы криптографии», обеспечивающий математическую базу для изучения дисциплины «Криптографические методы защиты информации». Основными задачами изучения курса «Математические основы криптографии» являются формирование у студентов представления о теоретических основах построения надежных криптографических преобразований и развитие умения пользоваться классическими и современными алгебраическими и теоретико-числовыми понятиями, методами, алгоритмами, поскольку даже простая реализация современных криптографических алгоритмов требует достаточно глубокого понимания основ теории чисел и алгебраических структур.

Содержание курса «Математические основы криптографии» включает модулярную арифметику как базу для понимания важнейших алгебраических структур и классического алгоритма передачи ключей Диффи – Хеллмана, понятие о проблеме факторизации целых чисел, лежащей в основе криптосистемы RSA, расширенный алгоритм Евклида, который не только остается в классе самых быстрых инструментов нахождения НОД целых