УДК 621. 762

М. Н. ВЕРЕЩАГИН, Ю. Д. ЧЕРНИЧЕНКО

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК В ПРОЦЕССЕ ИХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЖИМАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ (НЕЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Нелинейность существенно влияет на характер колебаний оболочки, что проявляется в возникновении специфических колебательных явлений типа срывов амплитуд, затягивания частот и др. [1].

Основой приближения являются нелинейные уравнения

$$X \equiv \frac{D\Delta^2 w}{h} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} -$$

$$- \frac{q_z}{h} + 2\rho\delta\frac{\partial w}{\partial t} + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\Delta^2 \Phi}{E} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

В уравнении (1) введен член, описывающий демпфирование колебаний оболочки с коэффициентом демпфирования δ.

В отличие от линейного приближения прогиб w оболочки будем искать в виде [2–4]:

$$w = f_{mn}(t)\sin\alpha x\ \sin\beta y + \psi_{mn}(t)\sin^2\alpha x, \tag{2}$$

где $\alpha = \pi m/L$; $\beta = n/R$.

Второй член выражения (2) отражает несимметричность прогиба относительно срединной поверхности с преимущественным направлением к центру кривизны.

После подстановки разложения (2) в правую часть уравнения (1) находим его решение

$$\frac{\Phi}{E} = A\sin\alpha x\ \sin\beta y + B\cos 2\alpha x + C\cos 2\beta y + D\sin 3\alpha x\ \sin\beta y - p_x\frac{y^2}{2E} - p_y\frac{x^2}{2E}, \tag{3}$$

где

$$A = \frac{\theta^2 f_{mn}}{R\beta^2\left(\theta^2+1\right)^2} - \frac{\theta^2}{\left(\theta^2+1\right)^2} f_{mn}\psi_{mn};\quad C = \frac{\theta^2 f_{mn}^2}{32};$$

$$B = \frac{f_{mn}^2}{32\theta^2} - \frac{\psi_{mn}}{8R\alpha^2};\quad D = \frac{\theta^2}{\left(9\theta^2+1\right)^2} f_{mn}\psi_{mn};$$

$$p_x = -\frac{pR}{2h};\quad p_y = -\frac{pR}{h}.$$

Составляющие p_x и p_y представляют собой внешние усилия, вызванные давлением p на днище, и боковую поверхность оболочки соответственно, а параметр θ определен ранее (см. линейное приближение задачи).

Для нахождения амплитуд f_{mn} и ψ_{mn} составляем уравнения, используя метод Бубнова – Галеркина [4]:

$$\int\limits_0^L dx \int\limits_0^{2\pi R} dy\, X \sin\alpha x \cdot \sin\beta y = 0,$$
$$\int\limits_0^L dx \int\limits_0^{2\pi R} dy\, X \sin^2\alpha x = 0. \tag{4}$$

После подстановки (1) – (3) в уравнения (4) и вычисления интегралов получаем систему уравнений, определяющих параметры прогиба оболочки:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\zeta}{dt} + \omega_0^2\zeta - a_1\zeta\xi + a_2\zeta^3 + a_3\zeta\xi^2 = Q\sin(n\omega t + n\varphi_0), \tag{5}$$
$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\delta\frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2\xi - \frac{1}{3}a_1\zeta^2 + a_4\zeta^2\xi = \frac{4E}{3\rho R^2}p_y^*,$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{4}{3}\frac{E\eta}{\rho R^2}\left[\frac{1}{4\eta} + \theta^2 p_x^*\right];\ a_1 = \frac{2E\eta}{\rho R^2}\left[\frac{1}{8} + \frac{\theta^4}{(1+\theta^2)^2}\right];$$
$$a_2 = \frac{E\eta^2}{16\rho R^2}\left(1+\theta^4\right);\ a_3 = \frac{E\eta^2}{\rho R^2}\left[\frac{\theta^4}{(1+\theta^2)^2} + \frac{\theta^4}{(1+9\theta^2)^2}\right];$$
$$a_4 = \frac{2}{3}\frac{E\eta}{\rho R^2}\left[\frac{\theta^4}{(1+\theta^2)^2} + \frac{5}{2}\frac{\theta^4}{(1+9\theta^2)^2}\right].$$

Здесь введены обозначения

$$\zeta = \frac{f_{mn}}{h};\ \xi = \frac{\psi_{mn}}{h};\ Q = \frac{3q}{\pi^2 mb\rho h}\left[1-(-1)^m\right] J_n(\varphi_0).$$

Решение системы уравнений (5) представляет собой большую математическую трудность. Однако можно найти приближенное решение данной системы, для чего вначале положим $\xi = 0$. Тогда задача сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\zeta}{dt} + \omega_0^2\zeta + a_2\zeta^3 = Q\sin(n\omega t - n\varphi_0). \tag{6}$$

Уточненное уравнение по сравнению с (6) получим, определяя величину ξ из статического варианта второго уравнения системы (5). В этом случае можно приближенно принять

$$\xi = \frac{4}{3}\frac{Ep_y^*}{\rho R^2\omega_1^2}. \tag{7}$$

После подстановки (7) в первое уравнение системы (5) для случая идеальной оболочки приходим к уравнению

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\zeta}{dt} + \omega_2\zeta + a_2\zeta^3 = Q\sin(n\omega t + n\varphi_0), \tag{8}$$

где

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{4}{3}\frac{Ep_y^* a_1}{\rho R^2\omega_1^2} + \frac{16}{9}\frac{E^2 p_y^{*2} a_3}{\rho^2 R^4\omega_1^4}.$$

Выражения (6) и (8) представляют собой уравнения Дюффинга для вынужденных колебаний, учитывающие дополнительное затухание колебаний под действием малого демпфирования, и отличаются лишь частотой собственных колебаний $\omega_i (i = 0,2)$. При исследовании этих уравнений нас будет интересовать величина амплитуды колебаний оболочки при заданной частоте внешнего возбуждения $\omega_n = n\omega$ в установившемся режиме при основном резонансе. Тем самым задача сводится к определению периодического решения уравнения (6) и (8) с частотой ω_n. В то же время необходимо отметить [1], что из-за нелинейного характера этих уравнений рассматриваемая оболочка может иметь периодические колебания с частотами ω_n/k (субгармоники) и $k\omega_n$ (ультрагармоники), $k = 2, 3, \ldots$

Пусть частота собственных колебаний оболочки ω_i близка к частоте внешней силы ω_n. Тогда решение уравнений (6) и (8) в первом приближении можно представить в виде [5]

$$\zeta = A(t)\sin(\omega_n t + \gamma(t)). \tag{9}$$

При этом можно потребовать, чтобы производная ${d\zeta}/{dt}$ имела вид

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t)\ \omega_n \cos[\omega_n t + \gamma(t)]. \tag{10}$$

Для определения стационарных режимов резонансных колебаний оболочки необходимо считать, что

$$dA/dt = 0; \quad d\gamma/dt = 0. \tag{11}$$

Представление решения уравнений (6) и (8) в форме (9) вместе с условием (10) приводит после процедуры усреднения к выражениям для производных dA/dt и $d\gamma/dt$

$$\frac{dA}{dt} = -\delta A - \frac{Q}{2\omega_n}\sin(\gamma - n\varphi_0), \tag{12}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\omega_n^2 - \omega_i^2}{2\omega_n} + \frac{3}{8}\frac{a_2 A^2}{\omega_n} - \frac{Q}{2\omega_n A}\cos(\gamma - n\varphi_0).$$

Условия (11) вместе с выражениями (12) позволяют найти зависимости между амплитудой и фазой стационарных колебаний оболочки, с одной стороны, и частотой внешней силы, с другой:

$$\begin{gathered} A^2 = Q\Big/\left\{\left[\nu^2(A) - \omega_n^2\right]^2 + 4\omega_n^2\delta^2\right\}, \\ \operatorname{tg}(\gamma - n\varphi_0) = -2\omega_n\delta\Big/\left[\nu^2(A) - \omega_n^2\right], \end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\nu^2(A) = \omega_i^2 + \frac{3}{4}a_2A^2.$$

Введем обозначения

$$\Psi\left(A^2, \omega_n^2\right) = A^2\left\{\left[\nu^2(A) - \omega_n^2\right]^2 + 4\omega_n^2\delta\right\} - Q.$$

Тогда из условия $\partial\Psi\big/\partial\left(\omega_n^2\right) = 0$ находим те значения частот внешнего воздействия ω_n, при которых будут реализованы максимальные амплитуды вынужденных колебаний. В результате приходим к следующей зависимости:

$$\left(\omega_n^2\right)_{\max} = \nu^2(A) - 2\delta^2.$$

В то же время из условия $\partial\Psi\big/\partial\left(A^2\right) = 0$ определяем частоты, при которых касательная к частотной характеристике A^2 (13) принимает вертикальное положение:

$$\left(\omega_n^2\right)_{гр} = \nu^2(A) - 2\delta^2 + \frac{3}{4}a_2A^2 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}a_2A^2 - 2\delta^2\right)^2 - 4\nu^2(A)\delta^2}. \qquad (14)$$

Найденные значения граничных частот (14) определяют те предельные значения ω_n, при которых нарушается устойчивость стационарных режимов. Такие величины частот существуют всегда, если только

$$\left(\frac{3}{4}a_2A^2 - 2\delta^2\right)^2 - 4\nu^2(A)\delta^2 \geqslant 0.$$

При этом при переходе частот внешнего возбуждения через значения (14) в оболочке будет иметь место скачкообразное изменение как ее амплитуды, так и сдвига фазы.

Амплитудно-частотную характеристику (13) можно представить в следующем виде:

$$\omega_n^2 = \nu^2(A) - 2\delta^2 \pm \sqrt{(Q/A)^2 - 4\delta^2\nu^2(A) + 4\delta^4}, \qquad (15)$$

где граничные частоты $\left(\omega_n^2\right)_{гр}$ определяются соотношением (14).

Максимальное значение амплитуды может быть найдено из (13) и значения частоты $\left(\omega_n^2\right)_{max}$.

Будем иметь

$$4\delta^2A_{max}^2\left(\nu^2 - \delta^2\right) - Q^2 = 0.$$

Отсюда, раскрывая скобки и учитывая $\nu^2(A)$, находим значение амплитуды A_{max}^2:

$$A_{max}^2 = \left[2\delta\left(\delta^2 - \omega_i^2\right) + \sqrt{4\delta^2\left(\omega_i^2 - \delta^2\right) + 3a_2Q^2}\right] \Big/ (3a_2\delta).$$

Динамическое поведение оболочки характеризуется явлением гистерезиса, описываемого амплитудно-частотной (13) и (14) и фазово-частотной (13) характеристиками. При этом динамические гистерезисные явления как амплитуды, так и фазы связаны со свойством неизохронности собственных колебаний оболочки и выражаются в зависимости периодов (частот) этих колебаний от амплитуды.

Полученные решения позволяют заключить, что устойчивость стационарных режимов оболочки будет наилучшей, если отсутствуют как граничные частоты, так и максимум амплитуды.

Для этого необходимо потребовать, чтобы

$$\partial\Psi \Big/ \partial\left(\omega_n^2\right) \neq 0; \quad \partial\Psi \Big/ \partial\left(A^2\right) \neq 0.$$

Это приводит к условиям

$$\Omega^2(A) - 2\delta^2 \leqslant 0,$$

$$\left(\Omega^2 - 2\delta^2 - \omega_i^2\right)^2 - 4\delta^2\Omega^2 \leqslant 0.$$

Совместное выполнение этих неравенств будет в том случае, если квадрат частоты собственных колебаний оболочки ω_i^2 связан с квадратом параметра демпфирования δ^2 соотношением

$$\omega_i^2 \leqslant 2\sqrt{2}\,\delta^2,$$

т. е. зона устойчивости колебаний оболочки в нелинейном случае в $\sqrt{2}$ раз шире, чем в линейном приближении.

Summary

It is shown that the unlinearance exerts essential influence on the character oscillations of cylindrical casings in the process their rotation and the availability of compressible loading. The dependences between the amplitude and phase static oscillations of casing from the frequency of external force were found by means of solution Duffinge's equations for the forced oscillations calculating the additional dicrease of oscillations on account of damping. The analysis of amplitude-frequency characteristics of process oscillation revolving casing is performed. The conditions stability static regimes of casing in the process its rotation under the availability of compressible loading and the damping are determined.

Литература

1. Ганцев Р. Ф., Ковальчук П. С. Динамика систем твердых и упругих тел. М., 1980.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., 1972.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., 1967.
4. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., 1956.
5. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М., 1984.

Гомельский политехнический институт

Поступила в редакцию 11.09.92