

жение отрыва будет убывать пропорционально h , и резко снизится энергия образования пор на ГЗ. Вследствие интенсивно идущего порообразования пластичность будет резко падать, что и подтверждается экспериментально.

Во-вторых, состояние "жидкой" фазы ГЗ не будет изменяться в процессе сверхпластической деформации, хотя на самом деле калориметрическими методами [1, 2] показано накопление энергии ГЗ в начале деформации (15%). Это объясняют возрастанием плотности зернограничных дислокаций (ЗГД) в начале деформации до некоторой величины, после достижения которой в результате аннигиляции плотность ЗГД остается неизменной. Однако этот факт можно объяснить тем, что в начале сверхпластичной деформации процесс "выравнивания" границ продолжается именно до 15%, образуются "приграничные" дислокации, ось которых не параллельна ГЗ. Эта приграничная полоска повышенной плотности дислокаций (вакансий) и обеспечивает накопление энергии в начале пластической деформации.

Кроме того, пик зернограничной релаксации не только хорошо описывается моделью ГЗ как вязкой прослойки, но и полностью аналогичен пику внутреннего трения при обратимом фазовом превращении.

Summary

Temperature dependences of maximal elongation, internal friction value, Young's modulus and heat capacity for Pb-Sn, Cd-Sn, Bi-Sn and Bi-Pb-Sn eutectic alloys are reported.

Литература

1. Грабский Н. В. Структурная сверхпластичность металлов. М., 1975.
2. Кайбышев В. А. Пластичность и сверхпластичность. М., 1982.
3. Пресняков А. А. и др. Сверхпластичность металлических материалов. Алма-Ата, 1982.
4. Орлов А. М., Перевенцев В. М., Рыбин В. В. Границы зерен в металлах. М., 1980.
5. Глейтерс Г., Чалмерс Б. Большеугольные границы зерен. М., 1975.
6. Атомная структура межзеренных границ / Под ред. А. М. Орлова. М., 1982.
7. Кристал М. А., Головин С. А. Внутреннее трение и структура металлов. М., 1976.
8. Кишкин С. Т. Физические методы исследования металлов. М., 1971. Т. 1.
9. Хансен М., Амерко К. Структура двойных сплавов. М., 1982.
10. Вол А. Е., Качан И. К. Строение и свойства двойных металлических систем. М., 1979.

*Институт механики металлополимерных систем
им. В. А. Белого АН Беларуси,
Институт проблем ресурсосбережения*

*Поступила в редакцию
27.11.95*

УДК 621.762

М. Н. ВЕРЕЩАГИН, Ю. Д. ЧЕРНИЧЕНКО

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК В ПРОЦЕССЕ ИХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЖИМАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ (ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

На основе анализа механизма формирования ленты и ее теплообмена с холодильником при двухвалковой закалке расплава [1] в Гомельском политехническом институте разработан принципиально новый технологический процесс двухвалковой закалки расплава, позволяющий повысить скорость охлаждения последнего и улучшить качество получаемой ленты. При этом скорость охлаждения в значительной степени зависит от распределения жидкой и твердой фаз, а также поля скоростей внутри охлаждаемого объема расплава до момента окончания процесса затвердевания [2].

Вследствие упругого выпучивания бошек валков с образованием линейной зоны очага деформации последнее идет практически перпендикулярно охлаждающим поверхностям, а процессы теплопроводности в расплаве и теплообмен с кристаллизатором определяются условиями теплопередачи на границе расплав — охлаждающая среда, так как термическое сопротивление теплопроводности стенки бандажа валка-кристаллизатора весьма мало и им можно пренебречь.

Стабильность разработанного процесса двухвалковой быстрой заковки расплава на упругих бочках, а также качество получаемых лент главным образом зависят от динамической устойчивости круговых цилиндрических тонкостенных оболочек в процессе их вращения при наличии радиальной сжимающей нагрузки. Кроме того, исследование динамики упругого выпучивания тонкостенных оболочек при воздействии внешних возмущений актуально и вызывает постоянный интерес при решении различных технических задач.

В основу математической модели динамической устойчивости тонкостенных бандажей, используемых в процессе двухвалковой быстрой заковки расплава, положена нелинейная теория динамики идеальных оболочек [3–5].

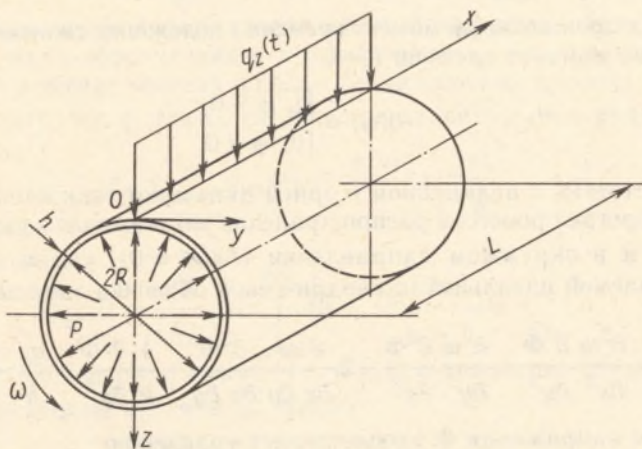


Рис. 1. Схема тонкостенной оболочки при расчете ее устойчивости в процессе вращения и наличия сжимающей нагрузки

Рассмотрим случай идеальной цилиндрической оболочки толщины h , длины L с радиусом средней поверхности R и плотностью материала оболочки ρ (рис. 1). Если концы оболочки $x = 0$, $x = L$ закреплены шарнирно, то смещение вдоль координатной линии z (по радиусу) удовлетворяет условиям

$$\omega = 0; \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad x = L. \quad (1)$$

Будем считать оболочку не напряженной, т. е. прогиб ω удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$\omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (2)$$

В момент времени $t = 0$ на оболочку начинают действовать внешние усилия: на внутреннюю поверхность — равномерное давление p ; на внешнюю поверхность в радиальном направлении — равномерно вращающаяся с постоянной угловой скоростью ω в окружном направлении y сжимающая нагрузка

$$q_z(y, t) = -\frac{3q}{4b} \left[\left(\frac{tg^2(\varphi - \varphi' - \varphi_0)}{tg\varphi_0} \right)^2 - 1 \right] \left[\theta(\varphi - \varphi') - \theta(\varphi - \varphi' - 2\varphi_0) \right], \quad b = R \sin \varphi_0, \quad (3)$$

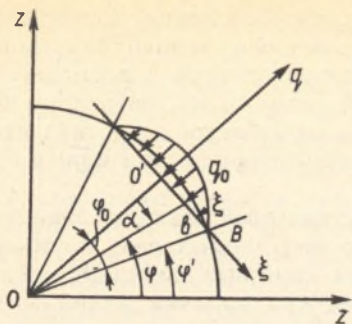


Рис. 2. Схема к расчету стрелы прогиба тонкостенной оболочки

где q — усилие, приходящееся на единицу длины образующей оболочки; $2\varphi_0$ — величина угла раствора приложения сжимающей нагрузки (рис. 2).

Параметр

$$\varphi' = \omega \sum_{k=0}^{\infty} (t - t_k) [\theta(t - t_k) - \theta(t - t_{k+1})], \quad t_k = 2\pi k / \omega,$$

определяет в произвольный момент времени t положение сжимающей нагрузки относительно момента времени $t = 0$

$$\theta(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi > 0, \\ 0, & \varphi < 0. \end{cases}$$

В соответствии с нелинейной теорией динамики тонкостенных оболочек [3, 4], пренебрегая процессом распространения упругих волн вдоль образующей ($\partial u / \partial t = 0$) и в окружном направлении ($\partial v / \partial t = 0$), уравнение движения рассматриваемой идеальной цилиндрической оболочки записываем в виде

$$\frac{D \Delta^2 \omega}{h} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q_z}{h} - \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где функция напряжений Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Delta^2 \Phi}{E} = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Здесь $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа; $D = Eh^3 / [12(1 - \sigma^2)]$ — жесткость оболочки; E — модуль упругости Юнга; σ — коэффициент Пуассона.

Уравнения (4) и (5) с граничными (1) и начальными (2) условиями полностью решают поставленную задачу для прогиба оболочки в процессе ее вращения и наличия радиальной сжимающей нагрузки.

Рассмотрим линейное приближение поставленной задачи, что соответствует случаю малых прогибов. Вместо уравнений (4), (5) тогда будем иметь

$$\frac{D \Delta^2 \omega}{h} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \rho_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{2s \partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{q_z}{h} - \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\Delta^2 \Phi}{E} = - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \quad (7)$$

В уравнении (6) для решения задачи динамической устойчивости оболочки введена некоторая фиктивная нагрузка, равная сумме проекций основных усилий ρ_x , ρ_y , s на направление нормали к изогнутой поверхности [4, 5].

$$\frac{q_\Phi}{h} = -\rho_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

Положительными здесь считаются усилия, способствующие увеличению параметров кривизны оболочки. В применении к ρ_x и ρ_y положительными принимаются усилия сжатия.

Действуя на уравнение (6) оператором Δ^2 и исключая $\Delta^2 \Phi$ с помощью уравнения (7), а также считая ρ_x , ρ_y , s не зависящими от координат, получаем

$$\frac{D\Delta^4 w}{Eh} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_x \frac{\Delta^2}{E} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho_y \frac{\Delta^2}{E} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{2s\Delta^2}{E} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\Delta^2 q_z}{Eh} + \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 (\Delta^2 w)}{\partial t^2} = 0. \quad (9)$$

Для оболочки с шарнирно опертыми концами (1) прогиб w будем искать в виде ряда [3-5]:

$$w = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}, \quad (10)$$

где m — число полуволн деформированной оболочки вдоль образующей; n — число полных волн, образующихся в поперечном сечении (значению $n = 1$ соответствует смещение сечения в целом без искажения формы).

Внешнюю нагрузку q_z также удобнее представить в виде ряда:

$$q_z = \sum_{m,n=1}^{\infty} q_{mn}(t) \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}, \quad (11)$$

где

$$q_{mn}(t) = \frac{2}{\pi R L} \int_0^L dx \int_0^{2\pi R} dy q_z \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}. \quad (12)$$

После подстановки разложений (10) и (11) в уравнение (9) и начальные условия (2) для стрелы прогиба f_{mn} имеем

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \omega_0^2 f_{mn} = \frac{1}{\rho h} q_{mn}, \quad (13)$$

$$f_{mn}(0) = 0; \quad \frac{df_{mn}(0)}{dt} = 0.$$

При этом было учтено, что на оболочку действует внутреннее давление p . Тем самым

$$\rho_x = -\frac{\rho R}{h}; \quad \rho_y = -\frac{\rho R}{2h}; \quad s = 0.$$

Величина ω_0^2 в уравнении (13) представляет собой квадрат частоты собственных колебаний оболочки:

$$\omega_0^2 = \frac{E\eta}{\rho R^2} \left[\frac{\eta(\theta^2 + 1)^2}{12(1 - \sigma^2)} + \frac{\theta^4}{\eta(\theta^2 + 1)^2} + \rho_y^* + \theta^2 \rho_x^* \right], \quad (14)$$

где

$$\theta = \frac{\pi m R}{n L}; \quad \eta = \frac{n^2 h}{R}; \quad \rho_x^* = \frac{\rho R^2}{2Eh^2}; \quad \rho_y^* = \frac{\rho R^2}{Eh^2}.$$

Параметр θ имеет смысл формы волнообразования и выражается как отношение длины полуволны вдоль дуги ($2\pi R/2n$) к длине полуволны по образующей (L/m).

Решение уравнения (13) для стрелы прогиба f_{mn} с правой частью q_{mn} , определяемой из (12) и (3), представляется в виде

$$\dot{f}_{mn} = \frac{3q[1 - (-1)^m] J_n(\varphi_0)}{\pi^2 mb \rho h (\omega_0^2 - n^2 \omega^2)} \left\{ \sin(n\omega t - n\varphi_0) - \right. \quad (15)$$

$$\left. - \frac{n\omega}{\omega_0} \left[1 + \left(\frac{\omega_0^2}{n^2 \omega^2} - 1 \right) \sin^2 n\varphi_0 \right]^{1/2} \sin \left[\omega_0 t + \arctg \left(\frac{\omega_0}{n\omega} \operatorname{tg}(n\varphi_0) \right) \right] \right\},$$

где

$$J_n(\varphi_0) = \frac{\sin n\varphi_0}{n \sin^2 \varphi_0} - \frac{\cos \varphi_0 \sin[(n+1)\varphi_0]}{\sin^2 \varphi_0} + \frac{2n(-1)^n}{\operatorname{tg}^2 \varphi_0} I_n(\varphi_0),$$

$$I_n(\varphi_0) = \begin{cases} \sum_{k=0}^i (-1)^{k+i} \frac{\sin[(2k+1)\varphi_0]}{2k+1} - \frac{(-1)^i}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right|, & n = 2i + 1, \\ \sum_{k=0}^i (-1)^{k+i} \frac{\sin[(2k+2)\varphi_0]}{2k+2} - \frac{(-1)^i}{2} \varphi_0, & n = 2i + 2. \end{cases}$$

Правая часть выражения (15) есть сумма двух гармонических колебаний с частотами $\omega_1 = n\omega$ и $\omega_2 = \omega_0$. Однако результирующее колебание не является гармоническим. В случае близости частот ω_1 и ω_2 колебательный процесс представляет собой биения с частотой $\omega_B = |\omega_0 - n\omega|$. Для уменьшения частоты биения, очевидно, необходимо наложить условие $\omega_0 = n\omega$, которое устанавливает связь между частотой ω и геометрическими (R, h, L), физическими (E, σ, ρ) параметрами оболочки, а также давлением p в линейном приближении. В то же время при выполнении условия $\omega_0 = n\omega$ имеет место явление резонанса. Однако в реальной ситуации ввиду наличия демпфирования колебаний, которое обеспечивается конструктивными элементами упругих бочек валков-кристаллизаторов, картина поведения амплитуды колебаний оболочки в зависимости от частоты ω будет существенно меняться. Считая, что сила сопротивления колебаниям оболочки пропорциональна скорости $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ с коэффициентом демпфирования δ , уравнение (13) переписываем следующим образом:

$$\frac{d^2 \dot{f}_{mn}}{dt^2} + 2\delta \frac{d \dot{f}_{mn}}{dt} + \omega_0^2 \dot{f}_{mn} = \frac{q_{mn}}{\rho h} \quad (16)$$

при тех же нулевых начальных условиях.

Его решение, отвечающее установившимся вынужденным колебаниям оболочки, записывается в виде

$$\dot{f}_{mn} = \frac{3q[1 - (-1)^m] J_n(\varphi_0)}{\pi^2 mb \rho h} \left[(\omega_0^2 - n^2 \omega^2)^2 + 4\delta^2 n^2 \omega^2 \right]^{-1/2} \sin(n\omega t + n\varphi_0 + \psi), \quad (17)$$

где

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{2\delta n\omega}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}.$$

Отсюда следует, что при $n\omega \ll \omega_0$ амплитуда из выражения (17) определится как

$$\dot{A}_{mn} = \frac{3q[1 - (-1)^m] J_n(\varphi_0)}{\pi^2 mb \rho h \omega_0^2}$$

и представляет собой статическую деформацию оболочки под действием постоянной силы $3q[(1 - (-1)^m] J_n(\varphi_0) / [\pi^2 mb]$.

В случае, когда $n\omega \gg \omega_0$,

$$A_{mn} = \frac{3q[(1 - (-1)^m] J_n(\varphi_0)}{\pi^2 mb\rho h n^2 \omega^2}$$

Вместе с тем максимальное значение амплитуды A_{mn}^{\max} будет соответствовать циклической частоте $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, которая несколько меньше собственной циклической частоты $\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, причем

$$A_{mn}^{\max} = \frac{3q[(1 - (-1)^m] J_n(\varphi_0)}{2\pi^2 mb\rho h \delta \Omega_0} \quad (18)$$

Из (18) следует, что при коэффициенте демпфирования $\delta \rightarrow 0$ амплитуда $A_{mn}^{\max} \rightarrow \infty$, т. е. наблюдается резкое ее возрастание. Кроме того, резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний оболочки происходит также при приближении циклической частоты возмущающей силы к значению Ω , определяемой формулой $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$. Для сглаживания резонанса, очевидно, необходимо увеличивать коэффициент демпфирования δ , причем при $\delta \geq \omega_0/\sqrt{2}$ явление резонанса полностью исчезает. Однако нелинейность процесса привносит существенные изменения в характер колебаний оболочки.

Summary

It is shown that the stability of process two-cylindrical of the hardening melt on elastic barrels and the quality of getting ribbons depends on the dynamic stability of circular cylindrical thinness casings. The linear problem of dynamic stability thinness casing in the process its rotation and the availability of compressible loading is solved. The analytical expression for the calculation of hollow casing is obtained. The analysis of process oscilation revolving thinness casing is performed. It is determined that the phenomenon of resonance disappears when the coefficient damping $\delta \geq \omega_0/\sqrt{2}$, but the unlinearence of process introduces essential changes in the character oscillations.

Литература

1. Верещагин М. Н. В кн.: Аморфные и микрокристаллические материалы. М., 1989. С. 5-8.
2. Верещагин М. Н., Тепляков В. Г. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1991. № 4. С. 16-22.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., 1972.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., 1967.
5. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., 1956.

Гомельский политехнический институт

Поступила в редакцию
11. 09. 92