

УДК 621.396

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТОРА СО СПЕЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛЮ ПРОВОДЯЩЕГО МАТЕРИАЛА

**В. Т. ЕРОФЕЕНКО**

*Учреждение Белорусского государственного университета «Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики», г. Минск*

**Д. В. КОМНАТНЫЙ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь*

*Представлен расчет характеристик электрического поля тора, изготовленного из плохо проводящего полимерного материала. Установлена модель свойств такого материала с учетом анизотропии его электрических свойств. Выведены аналитические соотношения для потенциала, составляющих напряженности электрического поля на поверхности тора, объемной плотности заряда в материале тора и поверхностной плотности заряда. Полученные расчетные формулы могут быть использованы для оценки условий работы деталей установок высокого напряжения, которые изготовлены в виде тора.*

**Ключевые слова:** установки высокого напряжения, регулирование электрических полей, плохо проводящие материалы, круговые торы, тороидальные координаты, составляющие напряженности электрического поля, объемная плотность заряда, поверхностная плотность заряда.

## ELECTRIC FIELD OF TORUS WITH SPECIAL MODEL OF CONDUCTIVE MATERIAL

**V. T. EROFEENKO**

*Institution of the Belarusian State University  
“Research Institute of Applied Problems of Mathematics  
and Informatics”, Minsk*

**D. V. KOMNATNY**

*Educational Institution “Sukhoi State Technical University  
of Gomel”, the Republic of Belarus*

*The author presents the calculation of electric field characteristics of torus which is manufactured from poor conducting polymer material. The model of such material properties is ascertained, taking into account its electrical properties anisotropy. Analytical ratios are derived for potential, components of electric field intensity on torus surface, volume charge density in torus material and surface charge density. The obtained calculation formulas can be used to assess the operating conditions of parts of high-voltage installations, which are made in the form of a torus.*

**Keywords:** high-voltage installations, electric field regulation, poor conducting materials, circular torus, toroidal coordinates, electric intensity components, space-charge density, surface charge density.

### Введение

Задача регулирования электрических полей в изоляции остается актуальной при проектировании установок высокого напряжения. Одним из способов решения этой задачи является применение полупроводящих, иными словами, плохо проводящих покрытий (не путать с полупроводниковыми) [1–3].

В [2] описан расчет электрических полей установок высокого напряжения, в конструкции которых использованы детали с такими покрытиями, методом граничных элементов. Этот метод, в свою очередь, основан на численном решении интегральных уравнений методом Крылова–Боголюбова. В этом же источнике поставлена задача разработки аналитических моделей для предварительного анализа и расчета электрических полей в установках высокого напряжения.

В [2, 4, 5] описаны конструкции установок высокого напряжения, в которых используются экраны и другие детали, изготовленные в форме круговых торов. Поэтому представляет интерес инженерный расчет и анализ электрических полей тороидальных деталей. К настоящему времени имеется достаточно большое количество публикаций, посвященных решению задач о расчете электрических полей торов.

В [6] приведено классическое решение для потенциала поля и поверхностной плотности заряда тора, поверхность которого имеет заданный потенциал.

В [7] рассмотрены задачи вычисления потенциала электрического поля тора, поверхность которого разделена на сегменты и заряжена до некоторого потенциала, а также расчета электростатической емкости таких торов.

В [8] исследован потенциал проводящего тора, поверхность которого имеет равномерный поверхностный заряд.

В [9] исследован потенциал диэлектрического тора с равномерным объемным зарядом.

В [10] найдены потенциал и поверхностная плотность заряда на поверхности тора, находящегося в равномерном осевом, равномерном поперечном электрических полях, а также в поле точечного заряда.

Статья [11] рассматривает возмущение равномерного электрического поля внешним в него тором из диэлектрика.

Видно, что электрическое поле тора из плохо проводящего материала осталось нерассмотренным. Поэтому в настоящей работе поставлена цель получения аналитических расчетных соотношений для характеристик электрического поля тора, изготовленного из плохо проводящего полимерного материала. Расчетные соотношения должны давать возможность вычисления тех характеристик поля, которые представляют значительный практический интерес. Заметим, что в литературе уделяется большое внимание краевым задачам взаимодействия электрических полей с телами геометрически простой формы, при решении которых используется метод теорем сложения и которые представляют интерес для техники высоких напряжений [12, 13].

### **Геометрическая структура тора**

В пространстве  $R^3$  с диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon_0$  размещен круговой тор (рис. 1). С центром тора  $O$  связаны декартова система координат  $Oxuz$  и тороидальная система координат  $O\alpha\beta\varphi$ .

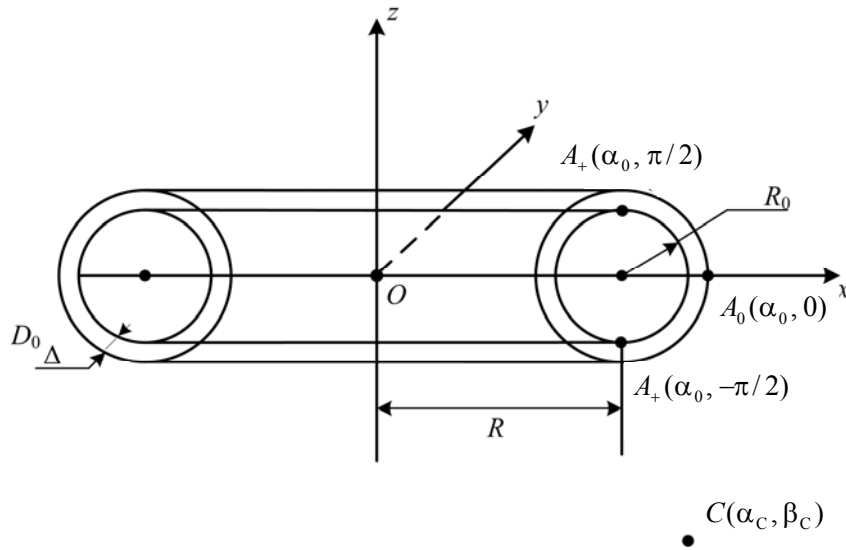


Рис. 1. Тор из проводящего материала, где слой  $D_0$  толщины  $\Delta$  с распределенными электрическими зарядами

Декартовы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и тороидальные  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi$  координаты связаны известными соотношениями [14–16]:

$$x = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad z = \frac{c \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}; \quad (1)$$

$$\alpha = \operatorname{arth} \frac{2c\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + c^2}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{2cz}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (2)$$

Тороидальные координаты изменяются в пределах  $0 < \alpha < \infty$ ,  $-\pi \leq \beta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Укажем на физические размерности величин:  $[R_0, R, c, x, y, z] = \text{м}$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi$  – физически безразмерные координаты.

В приведенной системе координат уравнение поверхности тора  $\alpha = \alpha_0$  имеет вид [16]:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - c \operatorname{coth} \alpha_0\right)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} \alpha_0}\right)^2. \quad (3)$$

В сечении тора плоскостью  $y = 0$  получаются две окружности радиуса  $R_0$  (рис. 1). Их уравнение имеет вид:

$$(x - c \operatorname{coth} \alpha_0)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} \alpha_0}\right)^2. \quad (4)$$

Вводятся обозначения:  $R = c \operatorname{coth} \alpha_0$ ,  $R_0 = \frac{c}{\operatorname{sh} \alpha_0}$ . Причем  $R > R_0$ . Тогда  $\operatorname{ch} \alpha_0 = \frac{R}{R_0} = \bar{R}$  и  $\operatorname{sh} \alpha_0 = \sqrt{\bar{R}^2 - 1}$ . С учетом представления гиперболических функций

через экспоненту [17] из (3) получается квадратное уравнение относительно  $e^{\alpha_0}$ :

$$e^{2\alpha_0} - \frac{2R}{R_0} e^{\alpha_0} + 1 = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$\alpha_0 = \ln \left( \frac{R}{R_0} - \sqrt{\left( \frac{R}{R_0} \right)^2 - 1} \right) = \ln \left( \bar{R} - \sqrt{\bar{R}^2 - 1} \right), \quad c = R_0 \operatorname{sh} \alpha_0 = R_0 \sqrt{\bar{R}^2 - 1}. \quad (5)$$

По формулам (5) определяются параметры тора в тороидальной системе координат по геометрическим размерам тора.

Для учета свойств плохо проводящего полимерного материала тора предполагается, что потенциал поверхности тора является постоянным, но диэлектрическая проницаемость материала имеет конечное значение, зависящее от тороидальной координаты  $\alpha$  по закону  $\varepsilon(\alpha, \beta) = \varepsilon_M \alpha$ . Диэлектрическая проницаемость материала имеет конечное значение  $\varepsilon_M = \varepsilon_r \varepsilon_0$ , в частности,  $\varepsilon_r = 5$ . Иными словами, материал тора обладает пространственной анизотропией, наиболее просто учитываемой в тороидальной системе координат.

Требуется получить расчетные соотношения для составляющих напряженности электрического поля на поверхности тора, для распределения объемной плотности электрического заряда в приповерхностном слое материала  $D_0$  и распределения поверхностной плотности заряда. Эти физические величины представляют существенный интерес для описания рабочих режимов установок высокого напряжения. В частности, от значения напряженности поля на поверхности конструкции зависит возможность возникновения коронного разряда. От наличия коронного разряда зависит уровень некондуктивных электромагнитных помех, создаваемых установкой высокого напряжения. В современных условиях требуется всемерное снижение эмиссии помех в электромагнитную среду [18].

### Потенциал электрического поля тора

Для вывода расчетных соотношений применяются базисные тороидальные решения уравнения Лапласа [16]:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{mn}(\alpha, \beta, \varphi) &= G(\alpha, \beta) Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch}\alpha) e^{jm\varphi + jn\beta}; \\ U_{mn}(\alpha, \beta, \varphi) &= G(\alpha, \beta) P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch}\alpha) e^{jm\varphi + jn\beta}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $G(\alpha, \beta) = \sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)}$ ;  $m, n$  – счетные переменные,  $P_{n-\frac{1}{2}}^m, Q_{n-\frac{1}{2}}^m$  – функции Лежандра.

Из условий симметрии следует, что для описания поля тора необходимо рассматривать частный случай (6) при  $m = 0$  и  $n = 0$ . Выражение для потенциала тора тогда получается из (6) в виде:

$$u(\alpha, \beta) = G(\alpha, \beta) \left( AP_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) + BQ_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) \right), \quad (7)$$

где  $u$  – потенциал,  $B$ ;  $A$  и  $B$  – постоянные,  $B$ .

Постоянные  $A$  и  $B$  обеспечивают требуемую размерность правой части выражения (7). Поэтому физические размерности  $[u, A, B] = В$ .

Вектор напряженности электрического поля в тороидальной системе координат выражается по формуле градиента скалярной функции в тороидальной системе координат [19]:

$$\vec{E}(\alpha, \beta) = -\text{grad}(u(\alpha, \beta)) = -\frac{1}{c} \left( \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha + \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} \vec{e}_\beta \right), \quad (8)$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля, В/м;  $h_\alpha, h_\beta$  – коэффициенты Ламе тороидальной системы координат;  $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta$  – направляющие векторы криволинейной тороидальной системы координат.

Касательная составляющая напряженности электрического поля на поверхности тора  $\alpha = \alpha_0$  выражается по формуле

$$E_\tau(\alpha_0, \beta) = (\vec{E}(\alpha_0, \beta), \vec{e}) = \frac{1}{ch_\beta(\alpha_0, \beta)} \frac{\partial u(\alpha_0, \beta)}{\partial \beta}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u(\alpha_0, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial G}{\partial \beta} \left( AP_{\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) + BQ_{\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) \right).$$

Если поверхность тора является эквипотенциальной, то  $E_\tau = 0$ . Тогда из (9) следует, что

$$AP_{\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) + BQ_{\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) = 0. \quad (10)$$

Для расчета постоянных  $A$  и  $B$  требуется задать условие для потенциала или нормальной составляющей электрического поля тора. Для технических приложений целесообразно задать разность потенциалов между точкой  $A_0(\alpha = \alpha_0, \beta = 0)$  и расчетной точкой  $C(\alpha = \alpha_c, \beta_c)$ , которые показаны на рис. 1:

$$u(\alpha_0, 0) - u(\alpha_c, \beta_c) = V, \quad (11)$$

где  $V$  – заданная разность потенциалов (напряжение).

Тогда из (7) и (11) получается уравнение для постоянных  $A$  и  $B$ :

$$AK_1 + BK_2 = V; \quad (12)$$

$$K_1 = G(\alpha_0, 0)P_{\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) - G(\alpha_c, \beta_c)P_{\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_c);$$

$$K_2 = G(\alpha_0, 0)Q_{\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) - G(\alpha_c, \beta_c)Q_{\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_c).$$

Уравнения (10) и (12) в совокупности образуют систему линейных алгебраических уравнений для отыскания постоянных  $A$  и  $B$ . Решение ее методом исключения [15] дает выражения для постоянных:

$$A = \frac{V}{P_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0)}; \quad (13)$$

$$K_1 - \frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0)}{Q_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0)} K_2.$$

$$B = -A \frac{P_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0)}{Q_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0)} = \frac{-VP_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0)}{K_1 Q_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) - K_2 P_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0)}. \quad (14)$$

Тогда выражение (7) с учетом (14) имеет вид:

$$u(\alpha, \beta) = G(\alpha, \beta) B \left( -\frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0)}{P_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0)} P_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha) + Q_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha) \right). \quad (15)$$

Нормальная составляющая напряженности электрического поля тора в точках на его поверхности по (8) имеет вид:

$$E_n(\alpha_0, \beta) = (\vec{E}(\alpha_0, \beta), e_\alpha) = \frac{1}{\text{ch}_\alpha(\alpha_0, \beta)} \frac{\partial u}{\partial \alpha}.$$

После подстановки (7) в (15) и с учетом (10) по правилу дифференцирования сложной функции [17] получается выражение:

$$E_n(\alpha_0, \beta) = \frac{1}{\text{ch}_\alpha(\alpha_0, \beta)} G(\alpha_0, \beta) \text{sh}(\alpha_0) \left( AP'_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) + BQ'_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) \right).$$

С учетом (14) окончательное выражение для нормальной составляющей электрического поля на поверхности тора:

$$E_n(\alpha_0, \beta) = \frac{G(\alpha_0, \beta) B \text{sh}\alpha_0}{\text{ch}_\alpha(\alpha_0, \beta)} \left[ \frac{Q'_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) P_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) - Q_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0) P'_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0)}{P_{-\frac{1}{2}}(\text{ch}\alpha_0)} \right]. \quad (16)$$

Введем вспомогательные величины с помощью (1):

$$\varphi_1(\alpha_0, \beta) = \frac{\text{sh}\alpha_0 \cos\beta}{\text{ch}\alpha_0 - \cos\beta}, \quad \varphi_2(\alpha_0, \beta) = \frac{\text{sh}\alpha_0 \sin\beta}{\text{ch}\alpha_0 - \cos\beta}, \quad \varphi_3(\alpha_0, \beta) = \frac{\sin\beta}{\text{ch}\alpha_0 - \cos\beta}.$$

По [19] получаем:

$$h_\alpha^2(\alpha_0, \beta) = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha_0} \right)^2 = \frac{(1 + \bar{R}^2 - 2\bar{R} \cos\beta)^2 + (\bar{R}^2 - 1) \sin^2\beta}{4(\bar{R} - \cos\beta)^3};$$

$$h_\alpha(\alpha_0, \beta) = \sqrt{\frac{(1 + \bar{R}^2 - 2\bar{R} \cos\beta)^2 + (\bar{R}^2 - 1) \sin^2\beta}{4(\bar{R} - \cos\beta)^3}}.$$

**Распределение электрических зарядов в приповерхностном слое  $D_0$** 

На поверхности тора  $\alpha = \alpha_0$  в приповерхностном слое  $D_0$  толщины  $\Delta$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\alpha, \beta)$  распределены заряды с объемной плотностью  $c(\alpha, \beta)$ , Кл/м<sup>3</sup>. Для упрощения модели рассмотрим диэлектрическую проницаемость с линейной зависимостью от координаты  $\alpha$ :  $\varepsilon(\alpha, \beta) = \varepsilon_M \alpha$ . Имеет место соотношение [19], которое выполнено в слое  $D_0$ :

$$\operatorname{div}(\varepsilon(\alpha, \beta) \vec{E}(\alpha, \beta)) = c(\alpha, \beta). \quad (17)$$

Преобразуем (17) с учетом соотношений теории поля [17, 19]:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_M \alpha \vec{E}(\alpha, \beta)) = (\operatorname{grad}(\varepsilon_M \alpha), \vec{E}(\alpha, \beta)) = \frac{\varepsilon_M}{\operatorname{ch}_\alpha(\alpha, \beta)} (\vec{e}_\alpha, \vec{E}(\alpha, \beta)).$$

Учитывая (8), получим из (17):

$$\operatorname{div}(\varepsilon_M \alpha \vec{E}(\alpha, \beta)) = -\frac{\varepsilon_M}{c^2 h_\alpha^2(\alpha, \beta)} \frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = c(\alpha, \beta). \quad (18)$$

Производная потенциала  $u$  (7) вычисляется по известному правилу дифференцирования сложной функции [17]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial G(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \left( AP_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) + BQ_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) \right) + \\ &+ \operatorname{sh}\alpha G(\alpha, \beta) \left( AP'_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) + BQ'_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) \right). \end{aligned}$$

После подстановки в (17) получается уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon_M}{c^2 h_\alpha^2(\alpha, \beta)} \left[ \frac{\partial G(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \left( AP_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) + BQ_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{sh}\alpha G(\alpha, \beta) \left( AP'_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) + BQ'_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) \right) \right] = c(\alpha, \beta). \quad (19) \end{aligned}$$

Применительно к точкам, принадлежащим поверхности тора  $\alpha = \alpha_0$ , уравнение (19) с учетом (10) имеет форму:

$$-\frac{\varepsilon_M}{c^2 h_\alpha^2(\alpha_0, \beta)} \operatorname{sh}\alpha_0 G(\alpha_0, \beta) \left( AP'_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0) + BQ'_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0) \right) = c(\alpha_0, \beta).$$

Аналогично, исключим постоянную  $A$ , применяя равенство (10). Получается:

$$\frac{\varepsilon_M \operatorname{sh}\alpha_0}{c^2 h_\alpha^2(\alpha_0, \beta)} \frac{G(\alpha_0, \beta) B}{P_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)} W(\operatorname{ch}\alpha_0) = c(\alpha_0, \beta), \quad (20)$$

где с учетом ранее введенных обозначений:

$$W(\operatorname{ch}\alpha_0) = Q_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)P'_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0) - P_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)Q'_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0) = W(\bar{R}).$$

Таким образом, формула (20) примет вид:

$$\frac{e_M \sqrt{\bar{R}^2 - 1}}{c^2 h_\alpha^2(\alpha_0, \mathbf{v})} \frac{G(\alpha_0, \mathbf{v})B}{P_{-\frac{1}{2}}(\bar{R})} W(\bar{R}) = c(\alpha_0, \mathbf{v}). \quad (21)$$

Для расчетов по формуле (21)  $G(\alpha_0, \mathbf{v}) = \sqrt{2(\bar{R} - \cos \mathbf{v})}$  по формулам (6).

Далее преобразуем формулу (21) в формулу для поверхностной плотности электрических зарядов путем умножения ее на  $\Delta$ . Получим:

$$\sigma(\alpha_0, \mathbf{v}) = c(\alpha_0, \mathbf{v})\Delta = \frac{e_M \sqrt{\bar{R}^2 - 1}}{c^2 h_\alpha^2(\alpha_0, \mathbf{v})} \frac{G(\alpha_0, \mathbf{v})B}{P_{-\frac{1}{2}}(\bar{R})} \Delta W(\bar{R}). \quad (22)$$

Формула (22) позволяет найти постоянную  $B$ , если задана поверхностная плотность электрического заряда  $\sigma_{\text{пов}}^{(+)}$  в точке  $A_+$ . Для этого вычислим объемную и поверхностную плотности на поверхности тора, полагая в (21)  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{2}$ . Получим:

$$c\left(\alpha_0, \frac{\mathbf{p}}{2}\right) = \frac{e_M \sqrt{\bar{R}^2 - 1}}{c^2 h_6^2\left(\alpha_0, \frac{\mathbf{p}}{2}\right)} \frac{G\left(\alpha_0, \frac{\mathbf{p}}{2}\right)B}{P_{-\frac{1}{2}}(\bar{R})} W(\bar{R}); \quad (23)$$

$$G\left(\alpha_0, \frac{\mathbf{p}}{2}\right) = \sqrt{2\operatorname{ch}\alpha_0} = \sqrt{2\bar{R}} \text{ и } c^2 = R_0^2(\bar{R}^2 - 1).$$

С учетом введенных выше вспомогательных величин по [19]:

$$\begin{aligned} h_\alpha^2\left(\alpha_0, \frac{\mathbf{p}}{2}\right) &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial\alpha_0}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha_0}{\operatorname{ch}\alpha_0}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0}\right)\right)^2 = \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha_0} = \frac{1}{\bar{R}^2}. \end{aligned}$$

Тогда из (23):

$$c\left(\alpha_0, \frac{\mathbf{p}}{2}\right) = \frac{e_M \sqrt{2\bar{R}}B}{R^2 \sqrt{\bar{R}^2 - 1} P_{-\frac{1}{2}}(\bar{R})} W(\bar{R});$$

$$\sigma_{\text{пов}}^{(+)} = c\left(\alpha_0, \frac{\mathbf{p}}{2}\right)\Delta = \frac{e_M \sqrt{2\bar{R}}B}{R^2 \sqrt{\bar{R}^2 - 1} P_{-\frac{1}{2}}(\bar{R})} \Delta W(\bar{R});$$



$$B = \sigma_{\text{пов}}^{(+)} \frac{R^2 \sqrt{\bar{R}^2 - 1} P_{\frac{1}{2}}(\bar{R})}{\epsilon_M \sqrt{2\bar{R}} \Delta W(\bar{R})}.$$

Тогда, в частности, поверхностная плотность электрического заряда вычисляется по формуле

$$\sigma(\alpha_0, \beta) = \sigma_{\text{пов}}^{(+)} \frac{G(\alpha_0, \beta) \bar{R}^2}{h_\alpha^2(\alpha_0, \beta) \sqrt{2\bar{R}}}. \quad (24)$$

### Пример расчета

В качестве примера в статье построен график распределения поверхностной плотности зарядов по поверхности тора по формуле (24). Параметры кругового тора, являющегося деталью установки высокого напряжения по [4]:  $R = 1$  м,  $R_0 = 0,2$  м. Диэлектрическая проницаемость материала тора  $\epsilon_M = 5$ . Поверхностная плотность электрического заряда  $\sigma_{\text{пов}}^{(+)}$  принята равной  $5 \cdot 10^{-6}$  Кл/м<sup>2</sup>. График представлен на рис. 2.

Из рис. 2 следует, что максимальная плотность электрического заряда концентрируется в точке  $A_0(\alpha = \alpha_0, \beta = 0)$  (см. рис. 1), как то должно быть из физических соображений. Поэтому допустимо считать, что приведенные в статье расчетные соотношения приводят к правильным результатам.

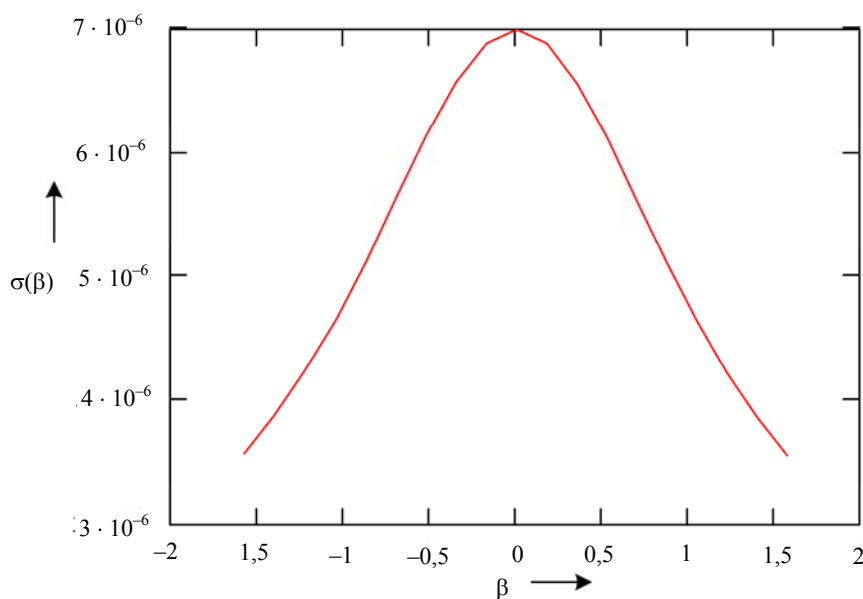


Рис. 2. Распределение поверхностной плотности заряда тора в зависимости от тороидальной координаты  $\beta$

### Заключение

Таким образом, в статье получены аналитические расчетные соотношения для величин, характеризующих электрическое поле тора: потенциала, нормальной составляющей напряженности электрического поля на поверхности тора, объемной плотности электрических зарядов в материале тора, поверхностной плотности заряда. При этом рассмотрен тор, изготовленный из плохо проводящего полимерного анизотропного материала. Хотя изделия из таких материалов широко применяются в конструкциях установок высокого напряжения, аналитический расчет характеристик электрического поля в присутствии таких изделий практически не представлен в ра-

ботах технической направленности. Расчетные соотношения в аналитической форме могут использоваться для предварительных расчетов электрических полей в установках высокого напряжения и для отладки программно-математического обеспечения, реализующего численные методы расчета электрических полей. Следовательно, полученные в статье результаты могут быть полезны при решении актуальных проблем разработки современного электротехнического оборудования.

### Литература

1. Техника высоких напряжений / Л. Ф. Дмоховская [и др.] ; под общ. ред. Д. В. Разевига. – М. : Энергия, 1976. – 488 с.
2. Гримальский, О. В. Расчет электрических полей изоляционных конструкций / О. В. Гримальский, В. Л. Иванов. – Кишинев : Штеница, 1988. – 106 с.
3. Расчет электрических полей устройств высокого напряжения / И. П. Белоедова [и др.] ; под ред. Е. С. Колечицкого. – М. : МЭИ, 2016. – 248 с.
4. Александров, Г. И. Изоляция электрических аппаратов высокого напряжения / Г. И. Александров, В. Л. Иванов. – М. : Энергоатомиздат, 1994. – 207 с.
5. Колечицкий, Е. С. Расчет электрических полей устройств высокого напряжения / Е. С. Колечицкий. – М. : Энергоатомиздат, 1983. – 168 с.
6. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 358 с.
7. Vinogradov, S. S. Canonical Problems in Scattering and Potential Theory. Part I. Canonical Structures in Potential Theory / S. S. Vinogradov, P. D. Smith, E. D. Vinogradova. – London : Charman & Holl/CRC, 2001. – 264 p.
8. Макушев, М. К. Электростатический потенциал заряженного тора / М. К. Макушев, Х.-М. Х. Байсиев // Успехи приклад. физики. – 2013. – Т. 1, № 3. – С. 268–271.
9. Ташаев, Ю. Н. Моделирование электростатического поля тороида / Ю. Н. Ташаев // Успехи приклад. физики. – 2015. – Т. 3, № 2. – С. 126–132.
10. Scharstein, R. W. Electrostatic excitation of a conducting toroid: exact solution and thin-wire approximation / R. W. Scharstein, H. B. Wilson // Electromagnetics. – 2005. – Vol. 25, N 1. – P. 1–19.
11. Krasnitsky, A. Evaluation of the uniform field distortions produced by a toroidal dielectric body / A. Krasnitsky, A. E. Popov, A. Kalnacs // Latvian Journal of Physics and Technical Sciences. – 2018. – N 4. – P. 57–58.
12. Ерофеев, В. Т. Моделирование поля канала импульсного электрического разряда в присутствии сферического экрана и тонкого проводящего стержня методом теорем сложения / В. Т. Ерофеев, Д. В. Комнатный, Е. В. Лозовская // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2012. – № 3 (50). – С. 85–92.
13. Ерофеев, В. Т. Расчет электростатической индукции зарядов в многоэлектродной модели системы молниезащиты методом теорем сложения / В. Т. Ерофеев, Д. В. Комнатный, Е. В. Комракова // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2018. – № 1 (72). – С. 70–78.
14. Пузынович, Ю. Г. Оценка влияния обмотки продольного магнитного поля на управляющее магнитное поле в установках типа «токамак» / Ю. Г. Пузынович. – Л. : НИИЭФА, 1978. – 18 с.
15. Неснов, Д. В. Элементы теории поля в тороидальных координатах / Д. В. Неснов // Стр-во и техноген. безопасность. – 2019. – № 16. – С. 17–25.

16. Ерофеенко, В. Т. Теоремы сложения / В. Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 254 с.
17. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Минск : Выш. шк. 1988. – 269 с.
18. Высоковольтные электротехнологии / Д. А. Аношин [и др.] ; под ред. И. П. Верещагина. – М. : МЭИ, 1999. – 204 с.
19. Ерофеенко, В. Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.

### References

1. Dmokhovskaya L. F., Larionov V. P., Pinal' Yu. S., Ryabkova E. Ya. *High-voltage techniques*. Ed. Razevig D. V. Moscow, Energiya Publ., 1976. 488 p. (in Russian).
2. Grimal'skii O. V., Ivanov V. L. *Calculation of electric fields in insulation constructions*. Kishinev, Shtinitsa Publ., 1988. 106 p. (in Russian).
3. Beloedova I. P., Eliseev Yu. V., Moiseev V. N., Plis A. I., Rat'kovskii A. G., Filipov A. A., Shul'gin V. N. *Calculation of electric fields in high-voltage equipment*. Ed. Kolechitskii E. S. Moscow, MEI Publ., 2016. 248 p. (in Russian).
4. Aleksandrov G. I., Ivanov V. L. *Insulation of electrical high-voltage apparatus*. Moscow. Energoatomizdat Publ., 1994. 207 p. (in Russian).
5. Kolechitskii E. S. *Calculation of electric fields in high-voltage equipment*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 168 p. (in Russian).
6. Lebedev N. N. *Special functions and their applications*. Moscow, GIFML Publ., 1963. 358 p. (in Russian).
7. Vinogradov S. S., Smith P. D., Vinogradova E. D. *Canonical Problems in Scattering and Potential Theory. Part I. Canonical Structures in Potential Theory*. London, Charman&Holl/CRC Publ., 2001. 264 p.
8. Makuashev M. K., Baisiev Kh.-M. Kh. Electrostatic potential of charged torus. *Uspekhi prikladnoi fiziki*, 2013, vol. 1, no. 3, pp. 268–271 (in Russian).
9. Tashaev Yu. N. Torus electrostatic field modeling. *Uspekhi prikladnoi fiziki*, 2015, vol. 3, no. 2, pp. 126–132 (in Russian).
10. Scharstein R. W., Wilson H. B. Electrostatic excitation of a conducting toroid: exact solution and thin-wire approximation. *Electromagnetics*, 2005, vol. 25, no. 1, pp. 1–19.
11. Krasnitsky A., Popov A. E., Kalnacs A. Evaluation of the uniform field distortions produced by a toroidal dielectric body. *Latvian Journal of Physics and Technical Sciences*, 2018, no. 4, pp. 57–58.
12. Erofeenko V. T., Komnatnyi D. V., Lozovskaya E. V. Simulation the field of pulsed electric discharge channel in the presence of a spherical screen and a pin-type conductive rod using addition theorem method. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2012, no. 3 (50), pp. 85–92 (in Russian).
13. Erofeenko V. T., Komnatnyi D. V., Komrakova E. V. Calculation of electrostatic induction of charges in a multielectrode model of the system of lightning protection by the method of addition theorems. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2018, no. 1 (50), pp. 70–78 (in Russian).

14. Puzynovich Yu. G. *Estimation of longitudinal magnetic field winding influence on control magnetic field in installation type "tokamak"*. Leningrad, NIIIEFA Publ., 1978. 18 p. (in Russian).
15. Nesnov D. V. Elements of field theory in toroidal coordinates. *Stroitel'stvo i tekhnogennaya bezopasnost' = Construction and industrial safety*, 2019, no. 16, pp. 17–25 (in Russian).
16. Erofeenko V. T. *Addition theorems*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1989. 254 p. (in Russian).
17. Vodnev V. T., Naumovich A. F., Naumovich N. F. *Handbook on basic mathematical formulas*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 1988. 269 p. (in Russian).
18. Anoshin D. A., Beloglovskii A. A., Kalinin A. V., Krivov S. A., Kuzhekin I. P., Orlov A. V., Panyushkin V. V., Sokolova M. V., Temnikov A. G. *High-voltage electrical technologies*. Ed. Vereshchagin I. P. Moscow, MEI Publ., 1999. 204 p. (in Russian).
19. Erofeenko V. T., Kozlovskaya I. S. *Analytical modeling in electrodynamics*. Minsk, BGU, 2010. 304 p. (in Russian).

Поступила 10.04.2023