Доклады Национальной академии наук Беларуси

2003 март—апрель Том 47 № 2

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539:375

Н. М. БОРОДАЧЕВ, Г. П. ТАРИКОВ

О ЗАДАЧЕ ГЕРЦА С УЧЕТОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ

(Представлено академиком А. И. Свириденком)

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого

Поступило 21.10.2002

Рассматривается пространственная контактная задача теории упругости с учетом тепловыделения при трении скольжения. Влияние тепловыделения на процесс контактного взаимодействия двух тел изучалось в [1—3].

Рассмотрим два упругих тела, находящихся в условиях скользящего контакта. При этом на площадке контакта этих тел возникают: нормальное давление $p(x,y)$ и касательные усилия трения $q(x,y)$. Доказано [4], что усилия $q(x,y)$ почти не влияют на распределение нормального давления, а также на форму и размеры площадки контакта. Касательные усилия $q(x,y)$ следует учитывать только при решении вопроса о тепловыделении при трении скольжения.

Считаем, что на площадке контакта имеют место условия теплообразования, предложенные Коровчинским [1]. А именно, в каждой точке площадки контакта выполняются два условия: а — сумма интенсивностей тепловых потоков, идущих в каждое из соприкасающихся тел, равна интенсивности теплообразования за счет сил трения; б — температуры тел равны.

Пусть два тела, ограниченные выпуклыми поверхностями S_1, S_2 соприкасаются в точке O, которую примем за начало координат. Проведем оси z_1 и z_2, перпендикулярные к общей касательной плоскости Π поверхностей S_1 и S_2 в точке O, внутрь каждого из тел. Следуя Герцу, тела, находящиеся в контакте, заменим упругими полупространствами. Площадка контакта Ω определяется областью внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Следовательно, имеем такие краевые условия при $z=0$:

$$\begin{gathered}
u_z^{(1)}+u_z^{(2)}=\delta-\varphi_1(x,y)-\varphi_2(x,y)\,,\ (x,y)\in\Omega\,,\\
\sigma_z^{(i)}=-p(x)\,,\ (x,y)\in\Omega\,,\\
\sigma_z^{(i)}=0\,,\ (x,y)\notin\Omega\,,\\
\tau_{xz}^{(i)}=\tau_{yz}^{(i)}=0\,,\ -\infty<x,y<\infty\,,\\
q_1+q_2=\frac{vf}{J}p(x,y),\qquad T_1=T_2\,,\ (x,y)\in\Omega\,,\\
q_i=0\,,\ (x,y)\notin\Omega\,.
\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $i=1,2$; u_z — проекция вектора перемещения на ось z; σ_z — нормальное напряжение; τ_{xz} и τ_{yz} — касательные напряжения; T — температура; φ_i — уравнение поверхности

S_i, v — скорость относительного скольжения; f — коэффициент трения скольжения; J — механический эквивалент тепла; q — интенсивность теплового потока. Имеем

$$q = -k\partial T/\partial n,$$

где k — коэффициент теплопроводности материала.

Для упрощения исследования примем, что оба контактирующих тела имеют одинаковую геометрию и выполнены из одного и того же материала. Тогда последние два условия (1) примут вид (при $z = 0$)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{vf}{2kJ}p(x,y), \qquad && (x,y) \in \Omega, \\ &\frac{\partial T}{\partial z} = 0, && (x,y) \notin \Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

где $k_1 = k_2 = k$. Решение уравнения теплопроводности с краевыми условиями (2) представим в такой форме:

$$T(x,y,z) = \frac{vf}{4\pi kJ}\frac{\partial}{\partial z}\iint_\Omega p(x_1,y_1)\ln(z+r)dx_1dy_1, \tag{3}$$

где $r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2}$.

Введем в рассмотрение термоупругий потенциал Ψ, определяемый соотношением

$$T(x,y,z) = \frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \tag{4}$$

где ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного температурного расширения. Используя формулы (3), (4) и полагая $z = 0$, получаем

$$\begin{gathered} \Psi(x,y,0) = \Psi(x,y) = \frac{\beta_0}{2\pi}\iint_\Omega p(x_1,y_1)\ln R dx_1dy_1, \\ \beta_0 = \frac{(1+\nu)\alpha vf}{4(1-\nu)kJ}, \quad R = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}. \end{gathered} \tag{5}$$

Решая уравнения равновесия Ламе с учетом температурных членов в области $z \ge 0$ и используя граничное условие для касательных напряжений из (1), находим, что при $z = 0$

$$u_z(x,y) = 2(1-\nu)\Psi(x,y) + \frac{1-\nu}{2\pi\mu}\iint_\Omega p(x_1,y_1)\frac{1}{R}dx_1dy_1, \quad (x,y)\in\Omega, \tag{6}$$

где μ — модуль сдвига. Подставляя (5) в (6), получаем

$$u_z(x,y) = \frac{\beta}{2\pi}\iint_\Omega p(x_1,y_1)\ln R dx_1dy_1 + \frac{1-\nu}{2\pi\mu}\iint_\Omega p(x_1,y_1)\frac{1}{R}dx_1dy_1, \; (x,y)\in\Omega, \tag{7}$$

где $\beta = 2(1-\nu)\beta_0 = \dfrac{(1+\nu)\alpha vf}{2kJ}$.

Если применить выражение (7) к каждому из двух соприкасающихся тел и учесть первое условие из (1), то будем иметь

$$\begin{gathered} \delta - \varphi_1(x,y) - \varphi_2(x,y) = \frac{(\beta_1+\beta_2)}{2\pi}\iint_\Omega p(x_1,y_1)\ln R dx_1dy_1 + \\ \frac{(\vartheta_1+\vartheta_2)}{2\pi}\iint_\Omega p(x_1,y_1)\frac{1}{R}dx_1dy_1, \quad (x,y)\in\Omega, \\ \beta_i = \frac{(1+\nu_i)\alpha_i vf}{2k_iJ}, \quad \vartheta_i = \frac{1-\nu_i}{\mu_i}, \quad i = 1,2. \end{gathered} \tag{8}$$

Уравнение (8) является двумерным интегральным уравнением первого рода контактной задачи с учетом тепловыделения при трении скольжения. Полагая в (8) $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получим известное интегральное уравнение задачи Герца.

Решая уравнение (8) можно найти закон распределения нормального давления $p(x,y)$ на площадке контакта Ω с учетом теплообразования при трении скольжения. Подставив затем найденную формулу для $p(x,y)$ в уравнение (8) и выполнив интегрирование, получим систему уравнений для определения сближения упругих тел δ, эксцентриситета и полуосей эллиптической площадки контакта.

Ограничиваясь в уравнении (8) рассмотрением лишь локальных эффектов, левую часть этого уравнения можно представить в виде

$$\delta - \varphi_1(x,y) - \varphi_2(x,y) = \delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2}, \quad (x,y) \in \Omega.$$

Вопросы, связанные с определением величин R_1 и R_2, подробно обсуждаются в монографии [5].

Литература

1. К о р о в ч и н с к и й М.В. Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхности соприкасания. М., 1961.
2. Г р и л і ц ь к и й Д.В. Термопружні контактні задачі в триболгії. Київ, 1996.
3. Г р и л и ц к и й Д.В., К р а с н ю к П.П. // Трение и износ, 1996. Т. 17, № 3. С. 312—319.
4. Д ж о н с о н К. Механика контактного взаимодействия. М., 1989.
5. Л у р ь е А. И. Теория упругости. М., 1970.

BORODACHYOV N. M., TARIKOV G. P.

ON THE HERTZ PROBLEM TAKING INTO CONSIDERATION HEAT GENERATION

Summamy

The three-dimensional contact problem of the theory of elasticity taking into consideration heat generation is esteemed at a sliding friction.