Доклады Академии наук Беларуси
1997 ноябрь—декабрь Том 41 № 6

УДК 539.375

Н. М. БОРОДАЧЕВ, Г. П. ТАРИКОВ

ВЕСОВАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ВНУТРЕННЕЙ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОМ ТЕЛЕ

(Представлено академиком А. И. Свириденком)

Предлагается самое общее выражение весовой функции для внутренней плоской круговой трещины в упругом теле.

Рассмотрим линейно-упругое тело, занимающее односвязный объем V. Пусть O — поверхность, ограничивающая этот объем. В теле имеется плоская внутренняя круговая трещина. Воспользуемся цилиндрической системой координат r, θ, z, начало которой совпадает с центром трещины. Ось z направим перпендикулярно плоскости трещины.

Коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва в любой точке граничного контура круговой трещины можно определить по формуле

$$K_1(\varphi) = \int_0^{2\pi}\int_0^a K_1(\varphi; r, \theta) p(r,\theta) r dr d\theta, \tag{1}$$

где a — радиус трещины, $p(r, \theta)$ — давление на поверхности трещины. Величина K_1 $(\varphi;\ r,\ \theta)$ называется весовой функцией. В основу предлагаемого метода построения весовой функции положим так называемую вариационную формулу для тела с трещиной [1,2]. Для круговой трещины эта формула имеет вид

$$\delta_n u_z(r,\theta) = \frac{\pi(1-\nu)}{2\mu}\int_0^{2\pi} K_1(\varphi; r,\theta) K_1(\varphi)\delta n(\varphi) d\varphi, \tag{2}$$

где u_z — проекция вектора перемещений на ось z, ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига, $\delta n(\varphi)$ — вариация контура трещины, $\delta_n u_z$ — вариация перемещения поверхности трещины, вызванная вариацией контура трещины. Положим, что $\delta n(\varphi)=\delta a=\text{const}$. Тогда формула (2) примет вид

$$\delta_n u_z(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(\varphi) K_1(\varphi; r,\theta) d\varphi, \tag{3}$$

где

$$f^*(\varphi) = \frac{\pi^2}{\mu}(1-\nu) a\delta a K_1(\varphi). \tag{4}$$

Здесь функция $f^*(\varphi)$ зависит только от φ, т.е. она задана на граничной окружности трещины.

Рассмотрим далее интеграл Пуассона

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)N(\varphi;r,\theta)d\varphi, \tag{5}$$

где

$$N(\varphi;r,\theta) = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi - \theta)}. \tag{6}$$

Интеграл в правой части формулы (5) дает гармоническую функцию внутри круга $r<a$, и $f(\varphi)$ суть предельные значения этой функции на окружности $r=a$.

Если в выражение (5) вместо $f(\varphi)$ подставить $f^*(\varphi)$ из (4), то получим

$$U^*(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(\varphi)N(\varphi;r,\theta)d\varphi. \tag{7}$$

Здесь $U^*(r, \theta)$ — гармоническая функция внутри круга $r<a$, предельные значения этой функции при $r=a$ суть $f^*(\varphi)$.

Возвратимся к формуле (3). Ее можно представить в виде

$$U^*(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(\varphi)N_l(\varphi;r,\theta)d\varphi, \tag{8}$$

где

$$N_1(\varphi;r,\theta) = K_1(\varphi;r,\theta)U^*(r,\theta) / \delta_n u_z(r,\theta). \tag{9}$$

Докажем, что функция $N_1(\varphi; r, \theta)$ — гармоническая. Применим оператор Лапласа Δ к обеим частям выражения (8). Так как функция $U^*(r, \theta)$ — гармоническая, то $\Delta U^*(r, \theta)=0$. Интеграл (8) можно дифференцировать по координатам r, θ под знаком интеграла, и это дифференцирование будет касаться только множителя $N_1(\varphi; r, \theta)$. В результате получим

$$\int_0^{2\pi} f^*(\varphi)\Delta N_1(\varphi;r,\theta)d\varphi = 0.$$

Так как $f^*(\varphi)\neq 0$, то $\Delta N_1(\varphi; r, \theta)= 0$. Отсюда следует, что $N_1(\varphi; r, \theta)$ — гармоническая функция внутри круга $r<a$.

Сравним выражения (7) и (8). В левых частях стоит одна и та же гармоническая функция U^*, а под интегралами — одна и та же предельная функция. Следовательно, и гармонические функции N и N_1 также должны быть равны друг другу, т.е.

$$N(\varphi;r,\theta) = N_1(\varphi;r,\theta). \tag{10}$$

Действительно, если бы функции N и N_1 были разными, то их разность $N(\varphi; r, \theta)-N_1(\varphi; r, \theta)$ была бы гармонической при $r<a$ и имела бы нулевые предельные значения при $r=a$, т.е. была бы тождественно равной нулю при $r<a$ [3]. Таким образом, равенство (10) имеет место. Подставляя в (10) выражение (9), получаем

$$K_1(\varphi;r,\theta) = N(\varphi;r,\theta)\delta_n u_z(r,\theta) / U^*(r,\theta). \tag{11}$$

Формула (11) определяет весовую функцию $K_1(\varphi; r, \theta)$ для упругого тела с внутренней круговой трещиной. Функция $N(\varphi; r, \theta)$ для круговой трещины определяется соотношением (6). Чтобы найти функцию

$\delta_n u_z / U^*$, входящую в (11), нужно иметь решение какой-либо более простой задачи для данного тела V с круговой трещиной (пробное решение).

В работе [4] получен частный случай формулы (11), который позволяет использовать только осесимметричные пробные решения. Формула (11) дает самый общий вид весовой функции для внутренней круговой трещины в упругом теле. Она позволяет использовать любые пробные решения, а не только осесимметричные.

В качестве примера рассмотрим неограниченное упругое изотропное тело с круговой трещиной. К поверхности трещины приложено давление $p(r, \theta)=p_0+p_1\cos 2\theta$, которое зависит от угла θ. Можно показать, что в этом случае

$$K_1(\varphi) = \frac{2a^{1/2}}{\pi}\left(p_0 + \frac{2}{3}p_1\cos 2\varphi\right), \quad \frac{\delta_n u_z(r,\theta)}{U^*(r,\theta)} = \frac{1}{\pi^2 a^{1/2}(a^2 - r^2)^{1/2}}. \tag{12}$$

Подставляя выражения (6) и (12) в формулу (11), получаем

$$K_1(\varphi; r, \theta) = \frac{1}{\pi^2 a^{1/2}} \frac{(a^2 - r^2)^{1/2}}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi - \theta)},$$

что согласуется с известным результатом [5].

Summary

The most general expression for weight function for plane internal circular crack occurred in elastic body of arbitrary shape is obtained.

Литература

1. Бородачев Н. М. // Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 4. С. 71—76.
2. Rice J. R. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. Vol. 52, N 3. P. 571—578.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1974. Т. 2.
4. Бородачев А. Н. // Прикл. мат. и механика. 1990. Т. 54, № 6. С. 1022—1030.
5. Kassir M. K., Sih G. C. Three-dimensional crack problems. Leyden, 1975.

Гомельский политехнический институт,
Киевский международный университет гражданской авиации

Поступило 06.06.97