УДК 539.12

А. А. БАБИЧ, В. И. КУВШИНОВ, Ф. И. ФЕДОРОВ

О РАЗМЫКАНИИ СУПЕРАЛГЕБРЫ В СЛУЧАЕ ОПИСАНИЯ ФЕРМИ- И БОЗЕ-ПОЛЕЙ УРАВНЕНИЯМИ ОДНОГО ПОРЯДКА

Начиная с работ Дирака, Паули, Даффина, Кеммера, предпринимались значительные усилия для того, чтобы поля с разными статистиками описывать дифференциальными уравнениями одного типа. Это, в частности, достигается в теории релятивистских волновых уравнений первого порядка (РВУ). В ряде статей рассматривается и возможность описания фермионов уравнениями второго порядка [1]. После открытия суперсимметрии, которая уравнивает права фермионов и бозонов, эта деятельность приобрела особую актуальность. Тем не менее, как было показано в работе [2], построение суперсимметричных теорий, в которых бозоны и фермионы описываются уравнениями первого порядка, приводит к теориям с открытыми алгебрами.

Целью данной работы является доказательство того факта, что и в случае, когда ферми- и бозе-поля описываются уравнениями второго порядка, не существует суперсимметричных теорий с замкнутой *off-shell*-алгеброй супергенераторов. Этот результат обобщается на уравнения произвольного порядка.

Пусть лагранжиан для системы невзаимодействующих ферми- и бозе-полей имеет вид

$$L = \bar{\Psi}\hat{\beta}\Psi, \tag{1}$$

где $\hat{\beta} = \partial_\mu \partial_\nu \beta^{\mu\nu} + \beta^0$, $\beta^{\mu\nu} = \beta^{(\mu\nu)}$; β^0 — постоянные квадратные матрицы; Ψ — супермультиплет, включающий ферми- и бозе-компоненты.

Преобразования из супергруппы Пуанкаре, которая является естественным суперсимметричным расширением пространственно-временной группы Пуанкаре, для супермультиплета $\Psi(x)$, принадлежащего по предположению линейному представлению, имеют вид [3]

$$\delta_{SP}\Psi = \varepsilon^\Omega \hat{G}_\Omega \Psi = \varepsilon^\Omega (N^1_\Omega + (\gamma^\mu N^2_\Omega)\partial_\mu)\Psi, \tag{2}$$

где $\Omega = (\mu, [\mu\nu], \alpha)$ — индекс, нумерующий супергенераторы $\hat{G}_\Omega = \{P_\mu, J_{[\mu\nu]}, Q_\alpha\}$; N^1_Ω, N^2_Ω — постоянные матрицы, определяющие структуру $\hat{G}_\Omega$; γ^μ — матрицы Дирака; ε^Ω — параметры суперпреобразований. Следует отметить, что линейность суперпреобразований (2) не зависит от вида уравнений, которым удовлетворяют $\Psi_A(x)$, а определяется только структурой алгебраических соотношений для супергенераторов $\hat{G}_\Omega$ и типом представления.

Тогда условия суперинвариантности при $\Omega=\alpha$ можно записать как [3]

$$\check{G}_\alpha \hat{\beta} + (-1)^{(A)} \hat{\beta} \hat{G}_\alpha = 0; \; \check{G}_\alpha = N^1_\alpha - (\gamma^\mu N^2_\alpha)\partial_\mu. \tag{3}$$

Введем явно матрицу лоренц-инвариантной билинейной формы η_L. Из лоренц-инвариантности ($\bar{\Psi}\eta_L\Psi = invar$) следует

$$J^{[\mu\nu]T}\eta_L + \eta_L J^{[\mu\nu]} = 0. \tag{4}$$

Далее можно показать, что генераторы $J_{[\mu\nu]}$, P_μ, $\eta_L^{-1}\check{G}_\alpha \eta_L$ и $J_{[\mu\nu]}$, P_μ, $-(-1)^{(A)}\hat{G}_\alpha$ удовлетворяют одной и той же алгебре [3]. А так как $\eta_L^{-1}\check{G}_\alpha\eta_L$ и $-(-1)^{(A)}\hat{G}_\alpha$ действуют в пространстве одной размерности, имеют одну и ту же матрично-дифференциальную форму, а по индексу α являются майорановскими спинорами, то представления соответствующих им супералгебр эквивалентны, и, значит, существует некоторый невырожденный сплетающий матричный оператор H такой, что [4]

$$H^{-1}\eta_L^{-1}\check{G}_\alpha \eta_L H = -(-1)^{(A)}\hat{G}_\alpha. \tag{5}$$

Введем матрицу $\hat{\alpha} = H^{-1}\eta_L^{-1}\hat{\beta}$, тогда из (3), с учетом соотношения (5), получим

$$[\hat{G}_\alpha, \hat{\alpha}] = 0. \tag{6}$$

Из дифференциальной структуры $\hat{G}_\alpha$ и $\hat{\alpha}$ следует, что

$$[\hat{G}_\alpha, \alpha^0] = [\hat{G}_\alpha, \alpha^{(\mu\nu)}] = 0. \tag{7}$$

В частности, имеем

$$[\hat{G}_\alpha, \alpha^{44}] = 0. \tag{8}$$

Но так как $\hat{G}_\alpha$ и P_μ образуют подалгебру g и $[P_\mu, \alpha^{44}] = 0$, т. е. α^{44} коммутирует со всеми генераторами этой подалгебры, то по лемме Шура α^{44} имеет вид

$$\alpha^{44} = \sum_{(\kappa)} c^{(\kappa)} I^{(\kappa)}, \tag{9}$$

где индекс (κ) нумерует неприводимые представления этой подалгебры. Последнее означает, что матрица α^{44} должна иметь нулевые или отличные от нуля блоки одновременно для всего неприводимого *off-shell*-супермультиплета $\Psi(x)$, поскольку подалгебра g с генераторами G_α и P_μ является и фактор-алгеброй: (супералгебра Пуанкаре/алгебра Лоренца). Другими словами, супермультиплет $\Psi(x)$ должен содержать либо все физические, либо все вспомогательные поля, уравнения для которых не содержат членов с производными по времени. Но это невозможно, поскольку при переходе к *off-shell*-представлению поля с различными спинами приобретают различное число дополнительных компонент и не будет выполняться равенство числа бозонных и фермионных степеней свободы, характерное для линейных представлений супергрупп [5]. Поэтому наше предположение о том, что суперсимметричная теория содержит супермультиплет $\Psi(x)$, принадлежащий линейному представлению супергруппы Пуанкаре, неверно. И любые суперсимметричные модели, чьи полевые уравнения представляют собой только уравнения второго порядка, с необходимостью будут обладать незамкнутостью *off-shell*-алгебры супергенераторов на полях $\Psi(x)$, так как последние не принадлежат соответствующему линейному представлению супергруппы. Попытка же сохранить замкнутость алгебры не согласуется с условиями суперинвариантности [3].

Легко обобщить полученный результат на случай уравнений более высокого порядка. Действительно, соотношения (9), следствием которых является коммутация матрицы α^{44}, стоящей перед временными производными, с генераторами фактор-алгебры $\hat{G}_\alpha$ и P_μ, в свою очередь, следуют из того факта, что оператор $\hat{\alpha}$, определяющий структуру полевых уравнений, содержит члены с производными, порядки которых различаются более чем на единицу. В этом случае в силу того, что генераторы суперпреобразований $\hat{G}_\alpha$ включают в себя члены с производными не выше первого порядка, равенство (6) распадается на две независимые системы равенств — отдельно для «массовой» α^0 и «кинетических» $\alpha^{\mu\ldots\nu}$ матриц. Поэтому можно сделать вывод, что для замыкания *off-shell*-супералгебры необходимо, чтобы супермультиплет Ψ содержал поля, подчиняющиеся как уравнениям n-го, так и $n\pm1$-го порядков, в противном случае супералгебра не будет замыкаться.

Конечно, доказанное здесь утверждение нельзя рассматривать как доказательство различия уравнений для бозонов и фермионов, поскольку наличие открытой алгебры не является само по себе аргументом в пользу нефизичности теории, так как в настоящее время разработаны методы для работы с теориями, обладающими незамкнутостью *off-shell*-алгебры генераторов [6]. Но тем не менее незамыкание алгебры суперсимметричных моделей, в которых используются уравнения только одного типа, указывает на то, что различие в описании полей, подчиняющихся разным статистикам, имеет более глубокую симметрийную природу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Petroni N. C. et al//Phys. Rev. D — 1985. — V. 31. — P. 3157—3161; Phys. Rev. D. — 1986. — V. 33. — P. 1674—1680.
2. Бабич А. А., Кувшинов В. И., Федоров Ф. И.//ДАН СССР. — 1988. — Т. 303. — № 1. — С. 55—58.
3. Бабич А. А., Кувшинов В. И., Федоров Ф. И.//ДАН БССР. — 1987. — Т. 31. — № 7. — С. 601—604.
4. Наймарк М. А. Теория представлений групп. — М.: Наука, 1976. — 560 с.
5. Sohnius M. F.//Phys. Rev. — 1985. — V. 128. — P. 39.
6. Batalin I. A., Vilkovisky G. A.//J. Math. Phys. — 1985. — V. 26. — № 1. — P. 172—184.

Гомельский политехнический институт
Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 12.12.88