5. Котельников Г. А.//Теоретико-групповые методы в физике. — М.: Наука, 1983. — С. 429—431.
6. Truax D. R.//J. Math. Phys. I. — 1981. — V. 22. — P. 1959—1964; II. — 1982. — V. 23. — P. 43—54.
7. Kalnins E. G., Miller W.//J. Math. Phys. — 1987. — V. 28. — P. 1005—1015.
8. Шаповалов В. Н.//Изв. вузов. Физика. — 1978. — № 5. — С. 116—122; № 6. — С. 7—10.
9. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 2. — М.: Мир, 1980. — 395 с.
10. Boyer C., Kalnins E., Miller W.//J. Math. Phys. — 1977. — V. 18. — P. 271—281.
11. Багров Б. Г., Самсонов Б. Ф., Шаповалов А. В.//Изв. вузов. Физика. — 1990. — № 7. — С. 5—9.

Сибирский физико-технический институт
им. В. Д. Кузнецова
при Томском госуниверситете

Поступила в редакцию 06.12.88.

УДК 539.12

И. Л. СОЛОВЦОВ

ЭНЕРГИЯ ОСНОВНОГО УРОВНЯ АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ПРЕДЕЛЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Развит непертурбативный метод вычисления функциональных интегралов. Эффективность его применения демонстрируется на примере вычисления энергии основного уровня ангармонического осциллятора.

Теория возмущений в настоящее время остается основным аппаратом, позволяющим получить численные результаты в квантовой теории поля. Применение теории возмущений вместе с процедурой перенормировки в квантовой электродинамике, в теории электрослабых взаимодействий и в квантовой хромодинамике позволило добиться впечатляющего согласия с экспериментом. Вместе с тем на протяжении практически всего периода развития квантовой теории поля стояла задача разработки непертурбативных методов. Выход за рамки теории возмущений необходим даже в квантовой электродинамике, несмотря на достаточную малость константы связи. Непертурбативного подхода требует и весьма актуальная проблема конфайнмента в хромодинамике.

Одной из попыток вычислений в теориях с большой константой связи является метод суммирования асимптотических рядов теории возмущений (см., например, [1—5] и цитируемую там литературу). При этом для членов высших порядков теории возмущений, которые не известны точно, применяются асимптотические формулы, полученные, например, с помощью метода функционального перевала [6—12]. Метод, развитый и использованный в работах [13], позволил получить двусторонние оценки на энергию вакуума.

Для полноты отметим работы [14], в которых используются иные подходы к проблеме сильной связи, а также упомянем метод $1/N$-разложения (см., например, обзоры [15]).

Несмотря на довольно значительные усилия в исследованиях проблемы сильной связи, этот вопрос в настоящее время еще далек от своего окончательного решения. Более того, большое число и разнообразие применяемых методов свидетельствуют о том, что не выработан еще единый, в достаточной степени универсальный подход к этой задаче.

В данной работе на примере вычисления энергии основного уровня квантово-механического осциллятора формулируется метод непертурбативного расчета, позволяющий, например, получить хорошие численные результаты в пределе сильной связи. Рассмотрение проводится на основе формализма функционального интеграла, который позволяет сформулировать единым образом как квантово-механические, так и теоретико-полевые задачи. Это обстоятельство указывает на достаточную универсальность предлагаемого метода.

Будем исходить из выражения для статистической суммы, записанной в виде функционального интеграла [16]:

$$\exp[-TE] = N^{-1} \int\limits_{\varphi(-T/2)=\varphi(T/2)} D\varphi \exp\left[-\left(S_0 + \frac{m^2}{2}\tilde{S} + gS_I\right)\right], \qquad (1)$$

$$N = \int\limits_{\varphi(-T/2)=\varphi(T/2)} D\varphi \exp\left[-\left(S_0 + \frac{m^2}{2}S_I\right)\right],$$

где E — свободная энергия,

$$S_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{-T/2}^{T/2} dt\dot{\varphi}^2; \quad \tilde{S} = \int\limits_{-T/2}^{T/2} dt\varphi^2; \quad S_I = \int\limits_{-T/2}^{T/2} dt\varphi^4. \qquad (2)$$

Энергия основного уровня получается из (1) в пределе $T\to\infty$. При этом удобно с точки зрения дальнейших приложений к теории поля перейти от функциональных интегралов, характерных для статистической механики, к функциональным интегралам евклидовой теории поля. Это удобно сделать, рассмотрев величину $\partial E_0/\partial g$, которая, как легко видеть из (1), равна

$$\partial E_0/\partial g = N^{-1}\int D\varphi\varphi^4(0)\exp\left[-\left(S_0 + \frac{m^2}{2}\tilde{S} + gS_I\right)\right],$$

$$N = \int D\varphi \exp\left[-\left(S_0 + \frac{m^2}{2}\tilde{S} + gS_I\right)\right], \qquad (3)$$

где S_0, $\tilde{S}$ и S_I задаются выражениями, аналогичными (2), но интегрирование по t выполняется в бесконечных пределах.

Перейдем в (3) к безразмерным величинам $\varphi\to g^{-1/6}\varphi$, $t\to g^{-1/3}t$. В результате получим

$$\partial E_0/\partial g = g^{-2/3}G(0,\ 0,\ 0,\ 0),$$

где

$$G(0,\ 0,\ 0,\ 0) = N^{-1}\int D\varphi\varphi^4(0)\exp\left[-\left(S_0 + \frac{\omega^2}{2}\tilde{S} + S_I\right)\right], \qquad (4)$$

$$N = \int D\varphi\exp\left[-\left(S_0 + \frac{\omega^2}{2}\tilde{S} + S_I\right)\right], \quad \omega^2 = g^{-2/3}m^2.$$

В дальнейшем нас будет интересовать предел сильной связи, когда $g/m^3\to\infty$.

Определим функционал

$$A = \theta S_0 + \frac{\varkappa}{2}\tilde{S}, \qquad (5)$$

где θ и $\varkappa$ — некоторые, пока произвольные, параметры, и перепишем (4) следующим образом:

$$G(0,\ 0,\ 0,\ 0) =$$

$$= N^{-1}\int D\varphi\varphi^4(0)\exp\left\{-\left[\left(S_0 + \frac{\omega^2}{2}\tilde{S} + A^2\right) + (S_I - A^2)\right]\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} N^{-1} \int D\varphi\varphi^4(0)\,[A^2 - S_I]^n \exp\left[-\left(S_0 + \frac{\omega^2}{2}\tilde{S} + A^2\right)\right]. \qquad (6)$$

Выражение (6) представляет собой новое, отличное от теории возмущений разложение функции Грина $G(0, 0, 0, 0)$. Такой прием позволяет получить сходящийся ряд в отличие от асимптотического ряда теории возмущений [17, 18].

Рассмотрим асимптотическое поведение функционального интеграла

$$\int D\varphi[A^2 - S_I]^n \exp[-(S_0 + A^2)] \qquad (7)$$

при больших номерах n. Выполняя замену $\varphi \to n^{1/4}\varphi$, представим (7) в перевальном виде (роль перевального параметра играет номер n)

$$n^n \int D\varphi \exp\{-nS_{\rm eff}[\varphi] - n^{1/2}S_0[\varphi]\}, \qquad (8)$$

где

$$S_{\rm eff}[\varphi] = A^2 - \ln[A^2 - S_I]. \qquad (9)$$

Перевальная функция φ_0 определяется из условия $\frac{\delta S_{\rm eff}}{\delta\varphi} = 0$ и удовлетворяет уравнению

$$-\ddot{\varphi}_0 + a\varphi_0 - b\varphi_0^3 = 0, \qquad (10)$$

где

$$a = \varkappa/\theta; \quad b = 2\{\theta A[\varphi_0]\,(1 - D[\varphi_0])\}^{-1}; \quad D[\varphi_0] = A^2[\varphi_0] - S_I[\varphi_0].$$

Решения уравнения (10), убывающие на бесконечности и соответствующие конечному действию, имеют вид

$$\varphi_0 = \pm \sqrt{\frac{2a}{b}}\,\{\mathrm{ch}\,[\sqrt{a}\,(t - t_0)]\}^{-1}, \qquad (11)$$

где t_0 — произвольный параметр, отражающий трансляционную инвариантность теории.

Нетрудно подсчитать значение функционала (9) на перевальной функции (11)

$$S_{\rm eff}[\varphi_0] = 1 - \ln D[\varphi_0], \qquad (12)$$

где

$$D[\varphi_0] = 1 - \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{\theta\varkappa^3}}. \qquad (13)$$

Таким образом, вклад дальних членов ряда (6) будет минимален при выборе таких параметров θ и $\varkappa$, чтобы $D[\varphi_0] = 0$. Такой способ фиксации ранее произвольных параметров мы назовем асимптотической оптимизацией. Он приводит к следующей связи между параметрами θ и $\varkappa$:

$$\varkappa_0 = \left(\frac{9}{16\theta}\right)^{1/3}. \qquad (14)$$

Оптимальное значение параметра θ выбирается по конечному числу первых членов ряда (6) из условия $G_\theta'(0, 0, 0, 0) = 0$*).

Функциональный интеграл (6) имеет негауссов вид. Однако с помощью преобразования

$$\exp(-A^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{4} - iuA\right) \qquad (15)$$

*) Метод оптимизации для теории возмущений рассматривался в работах [19].

можно добиться того, что в показателе экспоненты в (6) останутся только квадратичные по полям функционалы. В результате, замечая, что любую степень A^2, стоящую перед экспонентой в (6), можно набрать с помощью операции дифференцирования, запишем (6) с учетом (15) в виде

$$G(0, 0, 0, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} C_n^m (-1)^m \left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{n-m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \times$$

$$\times N^{-1} \int D\varphi\varphi^4(0) S_I^m \exp\left\{-\left[(1+iu\theta\sqrt{1-\alpha}) S_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}(\omega^2 + iu\varkappa\sqrt{1-\alpha})\tilde{S}\right]\right\}, \tag{16}$$

где после дифференцирования по α следует положить $\alpha=0$. Принимая размерную регуляризацию, в которой мера в функциональном интеграле (16) инвариантна относительно преобразования поля $\varphi \to k\varphi$ [18], из (16) получим

$$G(0, 0, 0, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(n-m)!} \left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{n-m} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) [1 + iu\theta\sqrt{1-\alpha}]^{-2-2m} g_m(z^2), \tag{17}$$

где

$$g_m(z^2) = \frac{(-1)^m}{m!} \int D\varphi\varphi^4(0) S_I^m \exp\left[-\left(S_0 + \frac{z^2}{2}\tilde{S}\right)\right]; \tag{18}$$

$$z^2 = \frac{\omega^2 + iu\varkappa\sqrt{1-\alpha}}{1 + iu\theta\sqrt{1-\alpha}}. \tag{19}$$

Отметим, что функция $g_m(z^2)$, определенная согласно (18), представляет собой обычные коэффициенты разложения функции $G(0, 0, 0, 0)$ в ряд теории возмущений. Таким образом, рассматриваемый здесь метод позволяет не вводить новые фейнмановские диаграммы, а использовать лишь ту диаграммную технику, к которой приводит обычная теория возмущений для исходного гамильтониана.

Нетрудно установить связь выражения (18) с коэффициентами A_n ряда теории возмущений для энергии основного уровня:

$$E_0(g) = \frac{1}{2} m + m \sum_{n=1}^{\infty} A_n (g/m^3)^n. \tag{20}$$

Дифференцируя это выражение по g и сравнивая с рядом теории возмущений для (3), найдем

$$g_m(z^2) = z^{-2-3m}(1+m) A_{1+m}. \tag{21}$$

Значения коэффициентов A_n могут быть взяты из работы [20].

С учетом (21), применяя представление

$$\frac{1}{a^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} dx\, x^{\nu-1} \exp(-ax) \tag{22}$$

и выполняя интегрирование по u, запишем (17) в виде

$$G(0,\ 0,\ 0,\ 0)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(1+m)\,A_{1+m}}{(n-m)!}\times$$
$$\times\left[\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{3m}{2}\right)\right]^{-1}\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{n-m}F_m, \qquad (23)$$

где

$$F_m=\int_0^{\infty}dxe^{-x}x^{m/2}\int_0^{\infty}dye^{-\omega^2y}y^{3m/2}e^{-(1-\alpha)(x\theta+yx)^2}. \qquad (24)$$

Напомним, что здесь мы интересуемся основным вкладом в E_0 в пределе сильной связи. Отметим, однако, что в принципе разлагая $\exp(-\omega^2 y)$ в (24) по степеням ω^2, можно получить и следующие поправки к основному вкладу.

Полагая $\varkappa=\varkappa_0$, где $\varkappa_0$ определено согласно (14), для энергии основного уровня при $m^2=0$ в N-м порядке нашей аппроксимации из (23) и (24) получим

$$E_0^{(N)}=3g^{1/3}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\frac{(1+m)\,A_{1+m}}{(n-m)!}\left(\frac{16}{9}\theta\right)^{1/3+m/2}\times$$
$$\times\left[\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{3m}{2}\right)\right]^{-1}R_{n,m}(\theta), \qquad (25)$$

где

$$R_{n,m}(\theta)=\int_0^{\infty}dxe^{-x}x^{m/2}\int_0^{\infty}dyy^{3m/2}(\theta x+y)^{2(n-m)}e^{-(\theta x+y)^2}. \qquad (26)$$

Считая, что оптимальное значение параметра θ, которое находится из условия $\partial E_0^{(N)}/\partial\theta=0$, достаточно мало: $\theta_0\ll 1$, — из (25) и (26) для небольших номеров N получим простое приближенное выражение

$$E_0^{(N)}=3g^{1/3}\sum_{m=0}^{N}\frac{(1+m)\,A_{1+m}}{(N-m)!}\,\frac{\Gamma(N-m/4+3/2)}{\Gamma(2+3m/2)}\,x^{2+3m}, \qquad (27)$$

где

$$\theta=9x^6/16.$$

Из (27) при $N=1$ находим, что оптимальное значение параметра x_0 равно 0,606, что соответствует $\theta_0=0{,}028$. Как видим, $\theta_0\ll 1$, и наше приближение обосновано. При таком выборе параметров для $E_0^{(1)}$ находим

$$E_0^{(1)}=0{,}660g^{1/3}. \qquad (28)$$

При этом нетрудно убедиться, что вклад следующего порядка не превосходит нескольких процентов. Выражение (28) следует сравнить с точным значением, полученным на основе численного решения уравнения Шредингера: $E_0=0{,}668\ g^{1/3}$ [21]. Таким образом, уже низшие порядки нашей аппроксимации обеспечивают хорошую точность расчетов.

Автор благодарит А. А. Афонина, В. Н. Капшая, В. Н. Старикова и В. Г. Теплякова за интерес к работе и полезные обсуждения полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kasakov D. I., Shirkov D. V.//Fortschr. der Phys. — 1980. — B. 28. — S. 465—499.
2. Seznec R., Zinn-Justin J.//J. Math. Phys. — 1979. — V. 20. — P. 1398—1408.
3. Казаков Д. И., Тарасов О. В., Ширков Д. В.//ТМФ. — 1979. — Т. 38. — С. 15—25.
4. Кубышин Ю. А.//ТМФ. — 1984. — Т. 58. — С. 137—148.
5. Попов В. С., Елецкий В. Л., Турбинер А. В.//ЖЭТФ. — 1978. — Т. 74. — С. 445—456.

6. Липатов Л. Н.//ЖЭТФ. — 1977. — Т. 72. — С. 411—427.
7. Lam C. S.//Nuovo Cim. — 1966. — V. 47A. — P. 451—459.
8. Collins J. C., Soper D. E.//Ann. Phys. — 1978. — V. 112. — № 1. — P. 209—234.
9. Langer J. S.//Ann. Phys. — 1967. — V. 41. — P. 108—157.
10. Auberson G., Mennessier G., Mahoux G.//Nuovo Cim. — 1978. — V. 48A. — P. 1—23.
11. Zinn-Justin J. — 1980. — 74 p./Preprint FUB/HEP.
12. Красников Н. В., Рубаков В. А., Токарев В. Ф.//ЯФ. — 1979. — Т. 29. — С. 1389—1391.
13. Ефимов Г. В. — Дубна, 1977. — С. 39/Препринт ОИЯИ Р2—10664;//Commun. Math. Phys. — 1979. — V. 65. — P. 15—44; Ефимов Г. В., Иванов М. А. — Дубна, 1977. — С. 44/Препринт ОИЯИ Р2—81—707.
14. Parisi G.//Phys. Lett. — 1977. — V. 69B. — P. 329—331; Bender C. M. et al.//Phys. Rev. — 1979. — V. D19. — P. 1865—1881; Castoldi P., Schomblond C.//Nucl. Phys. — 1978. — V. B139. — P. 269—290; Ader J. P., Bonnier B., Hontebeyric M.//Nucl. Phys. — 1980. — V. B170 [FS1]. — № 2. — P. 165—174; Fried H. M.//Nucl. Phys. — 1980. — V. B169. — P. 329—346.
15. Coleman S.//1/N. Ettore Majorana Int. School of Subnuclear Phys. Erice. — 1979. — P. 11—97; Slavnov A. A.//Acta Phys. Aust. Suppl. — 1983. — V. 25. — P. 357—389.
16. Фейнман Р. Статистическая механика. — М.: Мир, 1975.
17. Halliday I. G., Suranyi P.//Phys. Lett. — 1979. — V. 85B. — P. 421—423; Phys. Rev. — 1980. — V. D21. — № 6. — P. 1529—1537.
18. Ушверидзе А. Г.//ЯФ. — 1983. — Т. 38. — С. 798—802; Phys. Lett. — 1984. — V. 142B. — P. 403; Ушверидзе А. Г., Шубитидзе Н. И.//ЯФ. — 1984. — Т. 40. — № 5. — С. 1195—1208.
19. Stevenson P. M.//Phys. Rev. — 1981. — V. D23. — P. 2916—2944; Stevenson P. M., Politzer H. D.//Nucl. Phys. — 1986. — V. B277. — P. 758—769.
20. Bender C. M., Wu T. T.//Phys. Rev. — 1969. — V. 184. — № 5. — P. 1231—1261.
21. Hioe F. T., Montroll E. W.//J. Math. Phys. — 1975. — V. 16. — № 9. — P. 1945—1955.

Гомельский политехнический институт

Поступила в редакцию 10.06.88.

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

УДК 533.9.03

В. М. КРУТИЛИНА, Г. В. НЕСТЕРОВ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИИ МОЩНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ВОЗДУХЕ В СИЛЬНОМ НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Проведены численные расчеты релаксации мощного (0,6 МВт) высокоэнергетического (0,2 МэВ) пучка в воздухе ($P=1$ атм) в сильном соленоидальном магнитном поле методом комбинированных кодов, включающим метод Монте-Карло — для расчета эволюции пучка, метод характеристик — для расчета дивергенции лучистого потока, метод Писмена—Рэкфорда — для расчета температурного поля воздуха. Рассчитаны зона и интенсивность тепловыделения в камере, температура воздуха, тормозное излучение пучка, проведено сравнение с экспериментом.

Пусть в цилиндрическую камеру (длина L, радиус R), заполненную воздухом при атмосферном давлении, с торца камеры входит релятивистский пучок электронов и проходит в приосевой зоне. Радиус пучка на