

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 539.12
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-412-423>

Поступила в редакцию 11.05.2022
 Received 11.05.2022

В. И. Лашкевич¹, О. П. Соловцова^{1,2}, О. В. Теряев²

¹*Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого,
 Гомель, Республика Беларусь*

²*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Российская Федерация*

О ВКЛАДАХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В АНОМАЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ МОМЕНТЫ ЛЕПТОНОВ ОТ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА ЛЕПТОННЫМИ ПЕТЛЯМИ

Аннотация. Анализируются вклады высших порядков разложений по постоянной тонкой структуры α в аномальные магнитные моменты лептонов от диаграмм поляризации вакуума лептонными петлями в случае, если отношение массы лептона в петле к массе внешнего лептона оказывается меньше единицы. Найдена зависимость коэффициентов разложения a_n от отношения масс лептонов и проведено сравнение с ранее известными аналитическими оценками. Показано, что для реальных значений масс лептонов новые аналитические выражения оказываются более точными, чем известные. Даны оценки порядка разложения n^* , начиная с которого для коэффициентов a_n гарантируется та или иная точность.

Ключевые слова: аномальные магнитные моменты лептонов, квантово-электродинамические поправки, вклады высших порядков

Для цитирования. Лашкевич, В. И. О вкладах высших порядков в аномальные магнитные моменты лептонов от поляризации вакуума лептонными петлями / В. И. Лашкевич, О. П. Соловцова, О. В. Теряев // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 412–423. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-412-423>

Vasil I. Lashkevich¹, Olga P. Solovtsova^{1,2}, Oleg V. Tetyaev²

¹*Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus*

²*Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation*

ON HIGH ORDER CONTRIBUTIONS TO THE ANOMALOUS MAGNETIC MOMENTS OF LEPTONS DUE TO THE VACUUM POLARIZATION BY LEPTON LOOPS

Abstract. We analyze herein the higher orders contributions of expansions in the fine structure constant α to the anomalous magnetic moment of leptons coming from the diagrams of vacuum polarization by lepton loops in the case when the ratio of the mass of lepton in the loop to the mass of external lepton is less than unity. The dependence of the expansion coefficients a_n on the ratio of lepton masses is found and a comparison is made with the previously known analytical estimates. It is shown that for real values of lepton masses the new analytical expressions turn out to be more accurate than the known ones. Estimates are given for the order of expansion n^* , starting from which one or another accuracy is guaranteed for the coefficients a_n .

Keywords: anomalous magnetic moment of the leptons, quantum electromagnetic corrections, higher-order contributions

For citation. Lashkevich V. I., Solovtsova O. P., Tetyaev O. V. On high order contributions to the anomalous magnetic moments of leptons due to the vacuum polarization by lepton loops. *Vesti Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 412–423 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-412-423>

Введение. Теоретическое и экспериментальное изучение аномальных магнитных моментов лептонов $(g - 2)_L$ на протяжении многих десятилетий и по настоящее время (см., напр., обзоры [1, 2]) играет важную роль в развитии представлений о взаимодействии элементарных частиц и теориях, их описывающих. Отклонение гиромангнитного отношения g дираковской частицы от значения 2 принято обозначать через безразмерную величину a , называемую аномальным магнитным моментом частицы: $g = 2(1 + a)$. Впервые аномальный магнитный момент электрона a_e

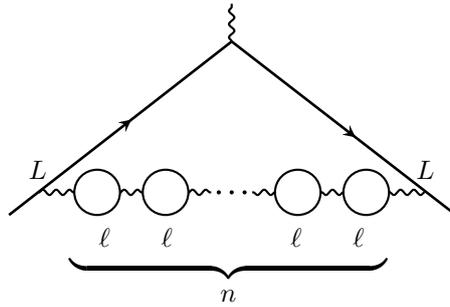


Рис. 1. Диаграмма поляризации вакуума n одинаковыми петлями, образованными лептонами с массой m_l , дающая вклад в аномальный магнитный момент лептона $(g - 2)_L$

Fig. 1. A diagram of the vacuum polarization n with identical loops formed by leptons with mass m_l which contributes to the abnormal magnetic lepton moment $(g - 2)_L$

был теоретически рассчитан в первом порядке теории возмущений по постоянной тонкой структуры α Ю. Швингером еще в 1948 г. [3] и соответствующее значение оказалось в блестящем согласии с имеющимся в то время экспериментальным значением $a_e^{\text{эксп}}$ (см. современный исторический обзор [4]). В данный момент и экспериментальная точность, и точность теоретических расчетов достигли высочайшего уровня, поэтому широко обсуждается не сама величина аномального магнитного момента лептона, а отклонение (дискрепанс) между предсказаниями Стандартной модели (СМ) и прямыми измерениями аномальных магнитных моментов электрона и мюона. На настоящий момент дискрепанс составляет примерно 2,5 стандартных отклонений для электрона, $\Delta a_e = a_e^{\text{эксп}} - a_e^{\text{СМ}} = -0,88(36) \cdot 10^{-12}$ (более подробно этот вопрос освещен, например, в [5, 6]) и, как показывает предварительная обработка данных E989 эксперимента в Фермилабе, $\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{эксп}} - a_\mu^{\text{СМ}} = (251 \pm 59) \cdot 10^{-11}$, что составляет примерно 4,2 стандартных отклонений для мюона [7].

Такие большие отклонения могут свидетельствовать в пользу существования новых взаимодействий и проявления Новой физики за пределами СМ. В связи с этим идет тщательная проверка теоретических предсказаний и численных расчетов независимыми методами, а также планируется улучшение экспериментальной точности.

Настоящая работа посвящена изучению в рамках СМ вкладов в аномальные магнитные моменты лептонов от диаграмм (рис. 1) поляризации вакуума лептонными петлями в высших порядках разложений по постоянной тонкой структуры α . Рассматривая случай, когда масса исходного лептона m_L больше (или равна) массы виртуальных лептонов в петлях m_l , т. е. $m_l/m_L \leq 1$, мы задаемся целью получить аналитические выражения для коэффициентов разложения a_n и сравнить их с уже известными [8, 9], а для реальных физических масс лептонов (рис. 2) привести оценку порядка разложения n^* , начиная с которого полученные аналитические выражения обеспечивают ту или иную точность.

Мотивация. Квантово-электродинамический вклад в аномальный магнитный момент лептона L , соответствующий поляризации вакуума лептонными петлями (см. рис. 1), представляется в виде разложения по постоянной тонкой структуре α (см., как, напр., в [8, 9]):

$$a_L(t) = \sum_{n=1} a_n(t) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n+1}, \tag{1}$$

где коэффициенты разложения выражаются через интеграл, определяемый поляризационным оператором $\Pi(x,t)$, который для удобства переписывается через функцию $f(x,t)$, $\Pi(x,t) \equiv \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) f(x,t)$:

$$a_n(t) = \int_0^1 (1-x) [-f(x,t)]^n dx, \tag{2}$$

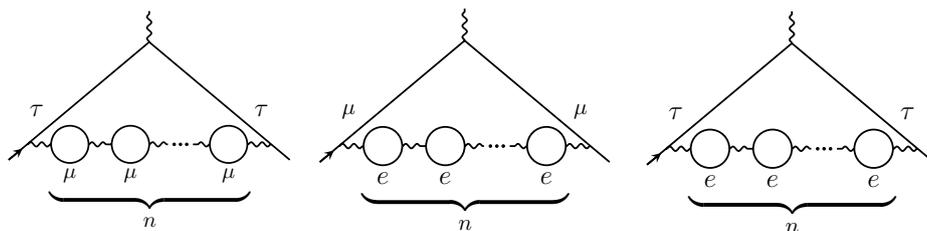


Рис. 2. Диаграммы поляризации вакуума, соответствующие реальным физическим случаям, если $t < 1$

Fig. 2. Vacuum polarization diagrams corresponding to real physical cases if $t < 1$

где

$$f(x, t) = \frac{5}{9} - \frac{4t(1-x)}{3x^2} + \frac{2t(1-x) - x^2}{3x^3} \sqrt{4t(1-x) + x^2} \ln \left[\frac{\left(x + \sqrt{4t(1-x) + x^2} \right)^2}{4t(1-x)} \right]. \quad (3)$$

Здесь и далее через t обозначается квадрат отношения масс лептона в петле m_l к массе внешнего лептона m_L :

$$t = \left(\frac{m_l}{m_L} \right)^2. \quad (4)$$

Заметим, что в настоящее время широко используются обозначения электродинамических коэффициентов, таких как A_1 и A_2 (см., напр., [10–12]), их соответствие с коэффициентами a_n в разложении (1) будет следующим: $a_n \Rightarrow A_{1v.p}^{(2n+2)}$ в случае, если все лептоны одного сорта ($t = 1$), и $a_n \Rightarrow A_{2v.p}^{(2n+2)}$, если лептоны в петле отличаются от внешнего лептона ($t \neq 1$). Отметим, что в сумму (1) не включено слагаемое при $n = 0$ – упомянутый выше результат Швингера [3], согласно которому лидирующее универсальное значение для лептонной аномалии равно $\frac{\alpha}{2\pi}$. Следует подчеркнуть, что для коэффициентов $a_n(t)$ при $t = 1$ известны точные выражения вплоть до $n = 13$ [13], тогда как для $t \neq 1$ точные аналитические выражения получены только для $n = 1$ и $n = 2$, а для $n = 3$ и $n = 4$ имеются лишь асимптотические разложения при малых $t < 1$ [14, 15] и больших $t > 1$ [15, 16].

Поясим цель наших исследований на примере табл. 1, в которой представлены значения коэффициентов $a_n(t)$, обозначенные как a_n^{exac} и полученные при численном интегрировании выражения (2) при разных значениях отношения масс лептонов. Значения t_1, t_2 и t_3 соответствуют реальным физическим случаям (см. рис. 2), а именно, отношению масс лептонов $m_\tau/m_\mu = 16,82$ для t_1 , $m_\mu/m_e = 206,8$ для t_2 и $m_\tau/m_e = 3478$ для t_3 . Значения же при $t = 1$ и $t = 0,01$ взяты нами для полноты рассмотрения и сравнения с полученными в работе [9] результатами.

Очевидно, что по приведенным в табл. 1 данным весьма затруднительно установить зависимость коэффициентов $a_n(t)$ от t . Не позволяют этого сделать и представленные в [9] выражения, поскольку они явно не пригодны при значениях t , близких к 1 (см. [9, табл. 4]).

С использованием метода седловой точки аналитическое выражение для коэффициентов $a_n(t)$ при $t = 1$ и больших порядках n впервые было получено в [8]. В этой работе приводится также и обобщение на случай $t < 1$, которое имеет вид

$$a_n^{\text{as}}(t) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right)^n e^{-\frac{10}{3}n} \frac{1}{t^2}, \quad t \leq 1, \quad n \gg 1. \quad (5)$$

В статье [9] для коэффициентов a_n , также при помощи метода седловой точки, но вблизи точки $x = 0$, была получена другая оценка, которую мы обозначим как c_n^{as} :

$$c_n^{\text{as}}(t) \approx \left(-\frac{2}{3} \right)^n e^{\frac{5}{6}n} n! \sqrt{t}. \quad (6)$$

Таблица 1. Коэффициенты $a_n(t)$ в разложении (1) в зависимости от порядка разложения n при разных значениях $t \leq 1$: $t_1 = t(m_\mu/m_\tau)$, $t_2 = t(m_e/m_\mu)$ и $t_3 = t(m_e/m_\tau)$

Table 1. The coefficients $a_n(t)$ in expansion (1) depending on the order n of expansion at different values of $t \leq 1$: $t_1 = t(m_\mu/m_\tau)$, $t_2 = t(m_e/m_\mu)$ и $t_3 = t(m_e/m_\tau)$

t	1	$1 \cdot 10^{-2}$	$t_1 = 3,5 \cdot 10^{-3}$	$t_2 = 2,3 \cdot 10^{-5}$	$t_3 = 8,3 \cdot 10^{-8}$
$n = 1$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	0,25	0,36	1,1	2,0
$n = 5$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	0,41	1,3	$5,9 \cdot 10^1$	$7,6 \cdot 10^2$
$n = 10$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	6,3	34	$1,8 \cdot 10^4$	$1,9 \cdot 10^6$
$n = 20$	$1,2 \cdot 10^1$	$1,2 \cdot 10^5$	$9,1 \cdot 10^5$	$8,8 \cdot 10^9$	$2,8 \cdot 10^{13}$
$n = 40$	$1,1 \cdot 10^{15}$	$1,1 \cdot 10^{19}$	$8,7 \cdot 10^{19}$	$2,0 \cdot 10^{24}$	$1,4 \cdot 10^{29}$

В настоящей работе мы другим способом, не используя метод седловой точки, получим аналитические оценки для коэффициентов a_n , которые достаточно точно воспроизводят приведенные в табл. 1 значения, а также проведем сравнение новых выражений с формулами (5) и (6).

Вычисление коэффициента a_n^{as} . Если рассматривать поведение $a_n(t)$ в разложении (1) при больших n (высокие порядки), то основной вклад в интеграл (2) будет вносить область больших x . Тогда для функции (3) можно воспользоваться приближением (см. [9])

$$f^{as}(x, t) = \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \ln(t) + \frac{1}{3} \ln(1-x), \tag{7}$$

и подынтегральная функция в (2) примет вид

$$F_n^{as}(x, t) = \frac{1}{3^n} (1-x) \left[-\frac{5}{3} - \ln(t) - \ln(1-x) \right]^n. \tag{8}$$

Сравнивая поведение точной функции $F_n(x, t) \equiv (1-x)[-f(x, t)]^n$ и функции, приближенной (8), легко установить, что с ростом n их поведение в области x , близкой к 1, становится очень похожим. Однако при малых x приближенная функция растет, кроме того, при нечетных n она становится отрицательной, тогда как точная функция $F_n(x)$ всегда положительная и стремится к нулю при $x \rightarrow 0$. Сравнение поведения $F_n^{as}(x)$ и $F_n(x)$ показывает, что сближение функций происходит после прохождения точки (x_0) , в которой F_n^{as} обратится в нуль. Это позволяет предположить, что, используя F_n^{as} , мы получим хорошее приближение для интеграла (2), если изменим нижний предел интегрирования на x_0 и тем самым уберем область, в которой F_n^{as} заведомо имеет неправильное поведение. Соответствующее приближение для $a_n(t)$, которое будем выделять тильдой над величиной, после замены переменной $x = 1 - e^{-u}$ примет вид

$$\tilde{a}_n^{as}(t) = \frac{1}{3^n} \int_{\frac{5}{3}}^{\infty} \left[-\frac{5}{3} - \ln(t) + u \right]^n e^{-2u} du. \tag{9}$$

Обозначив выражение в квадратных скобках через u , приходим к выражению

$$\tilde{a}_n^{as}(t) = e^{-\frac{10}{3}} t^{-2} \frac{1}{3^n} \int_{-\ln(t)}^{\infty} y^n e^{-2y} dy, \tag{10}$$

в котором интеграл вычисляется точно:

$$\int_z^{\infty} y^n e^{-2y} dy = 2^{-1-n} \Gamma(1+n, 2z). \tag{11}$$

Тогда, полагая $z = -\ln(t)$, получаем

$$\tilde{a}_n^{as}(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{10}{3}} \left(\frac{1}{6}\right)^n \frac{1}{t^2} \Gamma\left(1+n, -\ln(t^2)\right). \tag{12}$$

Поскольку для Г-функции при $n \gg 1$ имеет место оценка

$$\Gamma(1+n, x) \sim n! - \frac{x^{n+1}e^{-x}}{n},$$

то из (12) последует выражение (5), которое, как отмечалось выше, впервые было получено с использованием метода седловой точки в [8].

В табл. 2 приведены точные значения коэффициентов a_n^{exact} , полученные путем численного интегрирования (2), и приближенные значения, найденные с помощью выражений (5) и (12), – соответственно a_n^{as} и \tilde{a}_n^{as} . Последний столбец в табл. 2 (коэффициенты \tilde{b}_n) демонстрирует улучшенный результат, к получению которого мы перейдем ниже. Как видно из данных таблицы, значения коэффициентов \tilde{a}_n^{as} ближе к a_n^{exact} , чем a_n^{as} .

Таблица 2. Значения коэффициентов $a_n^{as}(t)$ и $\tilde{a}_n^{as}(t)$, согласно выражениям (5) и (12) соответственно, при $t = 0,01$. Значение \tilde{b}_n рассчитано по приведенной ниже формуле (36)

Table 2. The values of the coefficients $a_n^{as}(t)$ and $\tilde{a}_n^{as}(t)$, according to expressions (5) and (12), respectively, at $t = 0.01$. The value \tilde{b}_n is calculated using formula (36) below

n	a_n^{exact}	a_n^{as}	\tilde{a}_n^{as}	\tilde{b}_n
1	0,2483	29,73	0,03035	0,2104
2	0,2173	9,909	0,05215	0,1966
3	0,2358	4,955	0,09059	0,2199
4	0,2934	3,303	0,15943	0,2785
5	0,4051	2,753	0,28490	0,3893
6	0,6097	2,753	0,51828	0,5911
7	0,9899	3,211	0,96291	0,9661
8	1,7217	4,282	1,8338	1,6891
9	3,1934	6,423	3,5949	3,1460
10	6,2972	10,701	7,2874	6,2242
20	$1,1643 \cdot 10^5$	$1,1869 \cdot 10^5$	$1,1862 \cdot 10^5$	$1,1637 \cdot 10^5$
30	$2,1393 \cdot 10^{11}$	$2,1402 \cdot 10^{11}$	$2,1402 \cdot 10^{11}$	$2,1393 \cdot 10^{11}$
50	$6,7117 \cdot 10^{27}$	$6,7117 \cdot 10^{27}$	$6,7117 \cdot 10^{27}$	$6,7117 \cdot 10^{27}$

Хотя выражение (12) по сравнению с (5) дает улучшенный результат, однако область небольших n также не охватывается. На необходимость уточнения приближенной функции (7) указывает и тот факт, что приближенная функция обращается в нуль, только если $t > e^{-\frac{5}{3}} \approx 0,19$, поэтому для рассматриваемых физических значений t (см. табл. 1) всегда имеющийся при $t = 1$ нуль у функции (7) исчезает.

Вычисление коэффициентов b_n . Зададимся целью получить более точные выражения для коэффициентов $a_n(t)$ в разложении (1), чем дает применение формулы (12). Для этого используем приближение, уточняющее поведение функции $f(x, t)$ в интеграле (2) (см., напр., [9]), и вместо (7) запишем:

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \ln t - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x^2}{1-x} \right), \quad x \neq 0. \tag{13}$$

Коэффициенты разложения в этом случае будем обозначать как b_n , т. е.

$$a_L(t) = \sum_{n=1} b_n(t) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{n+1}, \tag{14}$$

где

$$b_n(t) = \int_0^1 (1-x) \left[-\tilde{f}(x, t) \right]^n dx. \tag{15}$$

Интеграл (15), в принципе, может быть вычислен точно, но уже при значениях $n > 15$ получение аналитических выражений на обычном компьютере, например, с помощью пакета Mathematica, становится проблематичным. Эту трудность легко обойти, если, следуя [9], воспользоваться преобразованием Бореля и представить коэффициенты b_n в следующем виде:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k G_{n-k} b_k. \tag{16}$$

Здесь C_{n-1}^k есть биномиальные коэффициенты, а

$$G_n = \frac{(-1)^n}{3^n} (n-1)! \left[(-1)^{n-1} + \frac{1}{2^n} + 1 + \zeta(n) [(-1)^n + 2^n - 1] \right], \quad n \geq 2, \tag{17}$$

$$G_1 = -\frac{1}{3} \ln t - \frac{25}{18}, \quad b_0 = \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Используя представление (16), легко вычислять b_n , в принципе, для любых n .

Вычисление коэффициентов $\tilde{b}_n(\delta)$. Сравним поведение приближенной функции $\tilde{f}(x, t)$ и точной функции $f(x, t)$, определяемых, соответственно, выражениями (13) и (3), при малых значениях переменной x легко обнаружить, что у функции $\tilde{f}(x, t)$ появляется полюс в точке $x = 0$, тогда как исходная функция $f(x, t)$ стремится к нулю при $x \rightarrow 0$.

На рис. 3 для $t = t_1$ и на рис. 4 для $t = t_2$ показано поведение приближенной $-\tilde{f}(x, t)$ (пунктирная линия) и точной $-f(x, t)$ функций, задаваемых выражениями (13) и (3) соответственно. Также приводится поведение этих функций при возведении их в степень (цифры у кривых): для степени 3 – это штрихпунктирные линии, а для степени 4 – линии из точек. Как видно из рис. 3 и 4, точная и приближенная функции сближаются после прохождения точки, в которой $\tilde{f} = 0$, причем с возведением в степень сближение только усиливается.

Обозначим точку, в которой приближенная функция обращается в нуль, как δ и запишем для ее нахождения уравнение

$$-\frac{5}{3} - \ln t + \ln \left[\frac{\delta^2}{1-\delta} \right] = 0. \tag{19}$$

Решая его, получаем

$$\delta(t) = \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma t)^2 + 4\gamma t} - \frac{1}{2} \gamma t, \quad \gamma = e^{\frac{5}{3}}. \tag{20}$$

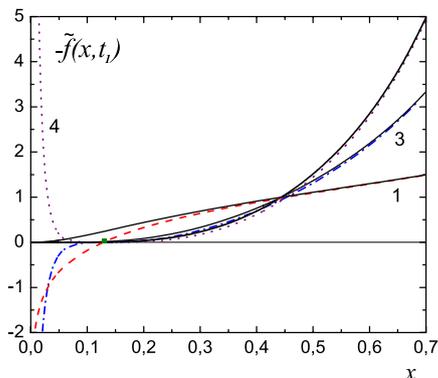


Рис. 3. Поведение функций $\tilde{f}(x, t_1)$ (пунктирная линия) и $f(x, t_1)$ (сплошная линия), возведенных в степень 3 и 4 (цифры у кривых)

Fig. 3. The behavior of the functions $\tilde{f}(x, t_1)$ (dashed line) and $f(x, t_1)$ (solid line) in 3rd or 4th power (numbers near curves)

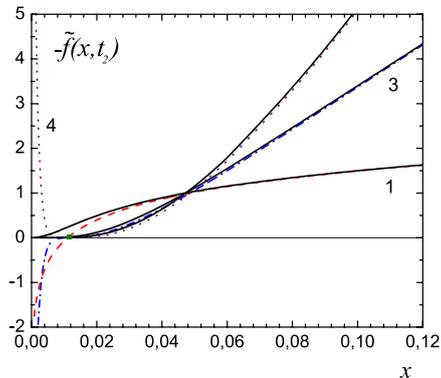


Рис. 4. Поведение функций $\tilde{f}(x, t_2)$ (пунктирная линия) и $f(x, t_2)$ (сплошная линия), возведенных в степень 3 и 4 (цифры у кривых)

Fig. 4. The behavior of the functions $\tilde{f}(x, t_2)$ (dashed line) and $f(x, t_2)$ (solid line) in 3rd or 4th power (numbers near curves)

Из выражения (20) следует, что при малых t , независимо от номера n , можно записать, что

$$\delta \approx \sqrt{\gamma t} - \frac{1}{2}\gamma t + O\left(t^{\frac{3}{2}}\right). \tag{21}$$

В табл. 3 приведены численные значения δ при рассматриваемых нами значениях t . Как видно, физическим значениям t соответствуют малые значения δ , что позволит нам в дальнейшем воспользоваться разложением по δ .

Таблица 3. Точка обращения функции $\tilde{f}(x, t)$ в нуль в зависимости от t

Table 3. The point of equality of the function $\tilde{f}(x, t)$ to zero depending on t

t	1	$1 \cdot 10^{-2}$	t_1	t_2	t_3
$\delta(t)$	0,860	0,20514	0,1278	0,011542	0,0006615

Обозначим через \tilde{b}_n коэффициенты, определяемые интегралом (15), в случае, если нижний предел интегрирования заменяется на δ :

$$\tilde{b}_n(\delta) = \frac{1}{3^n} \int_{\delta}^1 (1-x) \left[-\frac{5}{3} - \ln t + \ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right) \right]^n dx. \tag{22}$$

Прямым интегрированием нетрудно получить выражение для коэффициентов $\tilde{b}_n(\delta)$ при небольших значениях n . Однако с ростом n выражения для $\tilde{b}_n(\delta)$ становятся все более и более громоздкими и, очевидно, что путь прямого интегрирования оказывается не пригодным при $n \gg 1$. Поэтому так же, как и при нахождении коэффициентов b_n , которые далее мы переобозначим как $b_n^{(0)}$, воспользуемся техникой преобразования Бореля и представим выражение для нахождения \tilde{b}_n в виде

$$B(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \tilde{b}_n k^n. \tag{23}$$

Далее подставляя (22) в (23) и суммируя по n , получаем

$$B(k) = e^{k\beta} \int_{\delta}^1 \frac{x^{2k}}{(1-x)^{k-1}} dx, \tag{24}$$

где

$$\beta = -\frac{5}{3} - \ln t. \tag{25}$$

Содержащийся в (24) интеграл вычисляется точно:

$$B(k) = e^{k\beta} \left[\frac{\Gamma(1+2k)\Gamma(2-k)}{\Gamma(3+k)} - \frac{\delta^{1+2k} {}_2F_1(-1+k, 1+2k; 2(1+k); \delta)}{1+2k} \right]. \tag{27}$$

Дифференцируя это выражение по k и полагая $k = 0$, легко заметить, что коэффициент \tilde{b}_n представляется в виде

$$\tilde{b}_n(t) = b_n^{(0)}(t) - \Delta b_n(t), \tag{28}$$

где $b_n^{(0)}$ определяется (15), а $\Delta b_n(t)$ есть

$$\Delta b_n(t) = \frac{1}{3^n} \varphi^{(n)}(k, \delta(t))|_{k=0}. \tag{29}$$

Верхний индекс (n) у φ -функции означает n -ю производную по k , сама же функция равна

$$\varphi(k, \delta) = e^{k\beta} \frac{{}_2F_1(-1+k, 1+2k; 2(1+k); \delta)}{1+2k} \delta^{1+2k}. \tag{30}$$

Поскольку n -ю производную $\varphi(k, \delta)$ в явном виде получить не удастся, то воспользуемся тем, что для интересующих нас значений (t_1, t_2, t_3) δ по величине мало (см. табл. 3). Тогда, разлагая функцию (30) в ряд по степеням δ , для первых двух слагаемых можно записать:

$$\varphi_2(k, \delta) = e^{k\beta} \left[\frac{1}{1+2k} + \frac{k-1}{2(1+k)} \delta \right] \delta^{1+2k}. \tag{31}$$

Дифференцируя далее $\varphi_2(k, \delta)$ по k и полагая $k = 0$, получаем

$$\varphi_2^{(n)}(k, \delta)|_{k=0} = (-1)^n \left[2^n \Gamma\left(1+n, -\frac{z}{2}\right) \delta e^{-\frac{z}{2}} - \Gamma(1+n, -z) \delta^2 e^{-z} \right] + \frac{1}{2} z^n \delta^2, \tag{32}$$

где

$$z = 2 \ln \delta - \ln(\gamma t) = \ln(1 - \delta). \tag{33}$$

Выражение (32), с учетом следующих из (33) соотношений $\delta e^{-\frac{z}{2}} = \sqrt{\gamma t}$ и $\delta^2 e^{-z} = \gamma t$, переписывается как

$$\varphi_2^{(n)}(k, \delta)|_{k=0} = (-1)^n \left[2^n \Gamma\left(1+n, -\frac{z}{2}\right) \sqrt{\gamma t} - \Gamma(1+n, -z) \gamma t \right] + \frac{1}{2} z^n \delta^2. \tag{34}$$

Если воспользоваться разложением Γ -функции при малых z , поскольку $z \approx -\sqrt{\gamma t}$, то можно записать:

$$\varphi_2^{(n)}(t) = (-1)^n \left(2^n \sqrt{\gamma t} - \gamma t \right) n! + O\left((\gamma t)^{\frac{n+1}{2}} \right). \tag{35}$$

Подставляя это выражение в (29) и учитывая, что $\gamma = e^{\frac{5}{3}}$, для $\tilde{b}_n(t)$ получаем

$$\tilde{b}_n(t) = b_n^{(0)} - (-1)^n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{5}{6}\sqrt{t}} - \frac{1}{3^n} e^{\frac{5}{3}t} \right] n! + O\left((\gamma t)^{\frac{n+1}{2}} \right). \tag{36}$$

Легко видеть, что первое слагаемое в квадратных скобках совпадает с выражением для c_n^{as} , приведенным в (6). Если пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках в (36), то

$$\tilde{b}_n \approx b_n^{(0)} - (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{5}{6}\sqrt{t}}. \tag{37}$$

В [9] выражение для c_n^{as} (6) интерпретировалось как асимптотическая оценка коэффициента $b_n^{(0)}$. Как следует из (37), c_n^{as} является только частью коэффициента разложения по степеням (α/π) в (14). Проиллюстрируем это примером расчета для $t = 0,01$ (см. аналогичную табл. 2 в [9]).

Таблица 4. Численные значения коэффициентов разложения в (14) при $t = 0,01$, полученные с использованием формулы (36) при вычислении \tilde{b}_n , рекуррентного соотношения (16) для $b_n^{(0)}$ и формулы (6) для c_n^{as}

Table 4. The numerical values of the expansion coefficients in (14) at $t = 0.01$, obtained using formula (36) for \tilde{b}_n , recurrent relation (16) for $b_n^{(0)}$ and formula (6) for c_n^{as}

n	a_n^{exact}	\tilde{b}_n	$b_n^{(0)}$	c_n^{as}	$b_n^{(0)} - c_n^{as}$
1	0,2483	0,2134	0,0731	-0,1534	0,2266
2	0,2173	0,1973	0,3901	0,2045	0,1856
3	0,2358	0,2194	-0,1779	-0,4091	0,2312
4	0,2934	0,2790	1,3542	1,0908	0,2633
5	0,4051	0,3889	-3,2211	-3,6361	0,4150
6	0,6097	0,5918	15,084	14,544	0,5395
7	0,9899	0,9652	-66,797	-67,874	1,087
8	1,7217	1,691	363,4	362,0	1,366
9	3,1934	3,1424	$-2,1679 \cdot 10^3$	$-2,1720 \cdot 10^3$	4,119
10	6,2972	6,2323	$1,4483 \cdot 10^4$	$1,4477 \cdot 10^4$	2,979
11	13,173	13,035	$-1,06160 \cdot 10^5$	$-1,06173 \cdot 10^5$	24,97
12	29,185	29,036	$8,4946 \cdot 10^5$	$8,4943 \cdot 10^5$	-18,68
13	68,394	67,88	$-7,3620 \cdot 10^6$	$-7,3620 \cdot 10^6$	274,7
14	169,35	169,15	$6,8713 \cdot 10^7$	$6,8713 \cdot 10^7$	-795,9
15	442,61	439,8	$-6,8713 \cdot 10^8$	$-6,8713 \cdot 10^8$	$5,265 \cdot 10^3$
16	1219,6	1222,8	$7,3294 \cdot 10^8$	$7,3294 \cdot 10^8$	$-2,451 \cdot 10^4$
17	3539,1	3505,2	$-8,3070 \cdot 10^{10}$	$-8,3070 \cdot 10^{10}$	$1,494 \cdot 10^5$
18	10802	10949	$9,9680 \cdot 10^{11}$	$9,9680 \cdot 10^{11}$	$-8,641 \cdot 10^5$
19	34628	34242	$-1,2626 \cdot 10^{13}$	$-1,2626 \cdot 10^{13}$	$5,576 \cdot 10^6$
20	$1,164 \cdot 10^5$	$1,179 \cdot 10^5$	$1,6835 \cdot 10^{14}$	$1,6835 \cdot 10^{14}$	$-3,682 \cdot 10^7$

В табл. 4 при $t = 0,01$ приведены численные значения: a_n^{exact} , $\tilde{b}_n = b_n^{(0)} - \Delta b_n$, $b_n^{(0)}$, c_n^{as} и $b_n^{(0)} - c_n^{as}$. При вычислении \tilde{b}_n использовалось выражение (36), $b_n^{(0)}$ находился с помощью преобразования Бореля по рекуррентному соотношению (16), c_n^{as} – по формуле (6). Как видно, значения, соответствующие разности $b_n^{(0)} - c_n^{as}$ оказываются положительными и близкими к a_n^{exact} вплоть до $n = 9$, тогда как по отдельности для $b_n^{(0)}$ и c_n^{as} согласия с точным значением нет, однако они близки друг к другу – это указывает на то, что c_n^{as} хорошо аппроксимирует b_n . Проявление слагаемого, пропорционального t в (36), начинается с $n = 10$. С ростом n растет как само значение $b_n^{(0)}$, так и поправки Δb_n и c_n^{as} , и наблюдается эффект сокращения, который проявляется тем сильнее, чем больше n . Это указывает на то, что при вычислении коэффициентов высоких порядков таким методом потребуется высокая точность расчета, как, например, при оценке коэффициента для $n = 20$, несмотря на то, что сам он по величине – не маленькое число, точность его вычисления должна быть лучше, чем 10^{-10} .

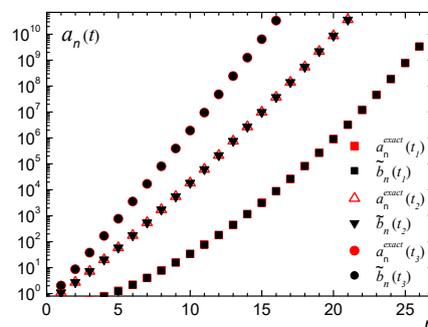


Рис. 5. Сравнение численных значений коэффициентов $a_n^{\text{exact}}(t)$ и $\tilde{b}_n(t)$ в исходном (1) и приближенном (14) разложении соответственно для $t_1 = t(m_\mu/m_\tau)$, $t_2 = t(m_e/m_\mu)$ и $t_3 = t(m_e/m_\tau)$

Fig. 5. Comparison of the numerical values of the coefficients $a_n^{\text{exact}}(t)$ and $\tilde{b}_n(t)$ in initial expansion (1) and approximation (14), respectively, at $t_1 = t(m_\mu/m_\tau)$, $t_2 = t(m_e/m_\mu)$ and $t_3 = t(m_e/m_\tau)$

Рис. 5 демонстрирует поведение коэффициентов $a_n^{\text{exact}}(t)$ и $\tilde{b}_n(t)$ соответственно в исходном (1) и приближенном (14) разложении в зависимости от порядка разложения n при физических значениях масс лептонов (см. табл. 1). Для $t_1 = t(m_\mu/m_\tau)$ результат обозначен квадратиками, для $t_2 = t(m_e/m_\mu)$ – треугольниками и $t_3 = t(m_e/m_\tau)$ – кружочками. Как видно, численные значения коэффициентов $a_n^{\text{exact}}(t)$ и $\tilde{b}_n(t)$ практически совпадают и увеличиваются с ростом n тем быстрее, чем меньше t .

В табл. 5 приведены значения $n^*(t)$, начиная с которых выражение (36), полученное при разложении до второго порядка δ^2 обеспечивает относительную точность ε (%). Отметим, что из выражения (30) легко получить разложения до третьего порядка δ^3 , и тогда порядок $n^*(t)$, начиная с которого достигается интересующая нас точность ε , снижается.

Таблица 5. Порядок разложения $n^*(t)$, начиная с которого формула (36) обеспечивает относительную точность ε

Table 5. The expansion order $n^*(t)$, starting from which formula (36) provides relative accuracy ε

$\varepsilon, \%$	$n^*(t_1)$	$n^*(t_2)$	$n^*(t_3)$
<10	1	1	1
<1	8	1	1
<0,1	18	3	2
<0,01	20	13	2

Заключение. Получены новые аналитические выражения для коэффициентов разложения $a_n(t)$ вклада в аномальный магнитный момент лептона, соответствующего поляризации вакуума одинаковыми лептонными петлями при $t \leq 1$. Из проведенного анализа следует, что можно записать 2 взаимно дополняющих выражения, имеющих различное как функция t поведение.

Поведение коэффициентов разложения при больших n определяется выражением

$$\tilde{a}_n(t) \sim e^{-\frac{10}{3}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n \frac{1}{t^2} \Gamma(1+n, -\ln(t^2)), \quad t \leq 1, \quad n \gg 1,$$

которое является более точным, чем при замене Γ -функции на $n!$. Если же такую замену проделать, то воспроизводится результат работы [8].

Другое выражение, аппроксимирующее коэффициенты разложения $a_n(t)$, имеет вид

$$\tilde{b}_n(t) \approx b_n^{(0)}(t) - (-1)^n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{5}{6}\sqrt{t}} - \frac{1}{3^n} e^{\frac{5}{3}t} \right] n!, \quad t \text{ мало, } n \text{ любое,}$$

где $b_n^{(0)}(t)$ легко находятся по рекуррентному соотношению с помощью преобразования Бореля.

Все приведенные в табл. 1 численные значения коэффициентов $a_n(t)$ могут быть получены только с использованием $\tilde{b}_n(t)$. При $n \gg -\ln(t^2)$ оценка коэффициента $a_n(t)$ с использованием выражения $\tilde{b}_n(t)$ в виде разложения по степеням $(\gamma t)^{\frac{n}{2}}$ потребует учета большого числа членов разложения. Эту трудность легко обойти, поскольку при больших n можно воспользоваться выражением $\tilde{a}_n(t)$. Так, например, различие между значениями $\tilde{a}_n(t_2)$ и $\tilde{b}_n(t_2)$ для $n > 25$ составляет менее 1 %. Отметим, что если учесть следующие слагаемые в разложении функции (30) по δ , то точность нахождения коэффициентов \tilde{b}_n улучшается. Однако наши расчеты показали, что для рассматриваемых физических значений масс лептонов, т. е. t_1, t_2 и t_3 , при сохранении четырех значащих цифр, отличия между использованием разложения по δ до второго и третьего порядков – нет. При $n = 3$ и $n = 4$ выражения для коэффициента $\tilde{b}_n(t)$ находятся в полном согласии с разложениями по t , полученными при помощи техники интегралов Меллина – Барнса [17–19] в работе [14].

Полученные аналитические выражения могут быть использованы для проверки численных расчетов вкладов от диаграмм поляризации вакуума в аномальный магнитный момент лептона $(g - 2)_L$ в высших порядках n разложения по постоянной тонкой структуры α , а также для оценки еще не учтенных вкладов высших порядков. Как показали наши исследования, с ростом n , несмотря на то, что сами численные значения коэффициентов становятся большими, из-за эффекта сокращения точность численных расчетов должна быть все более и более высокой.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Международной программы сотрудничества между Республикой Беларусь и ОИЯИ.

Acknowledgements. This work was supported by the International Program of Cooperation between the Republic of Belarus and JINR.

Список использованных источников

1. Lautrup, B. E. Recent developments in the comparison between theory and experiments in quantum electrodynamics / B. E. Lautrup, A. Peterman, E. Rafael // *Phys. Rep.* – 1972. – Vol. 3, № 3. – P. 193–259. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(72\)90011-7](https://doi.org/10.1016/0370-1573(72)90011-7)
2. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model / T. Aoyama [et al.] // *Phys. Rep.* – 2020. – Vol. 887. – P. 1–166. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.07.006>
3. Schwinger, J. S. Quantum Electrodynamics. III. The Electromagnetic Properties of the Electron – Radiative Corrections to Scattering / J. S. Schwinger // *Phys. Rev.* – 1949. – Vol. 76, № 6. – P. 790–817. <https://doi.org/10.1103/physrev.76.790>
4. Consa, O. Something is wrong in the state of QED [Electronic resource] / O. Consa // Arxiv [Preprint]. – 2021. – Mode of access: <https://arxiv.org/abs/2110.02078>. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.02078>
5. Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model / R. H. Parker [et al.] // *Science.* – 2018. – Vol. 360, № 6385. – P. 191–195. <https://doi.org/10.1126/science.aap7706>
6. Davoudiasl, H. Tale of two anomalies / H. Davoudiasl, W. J. Marciano // *Phys. Rev. D.* – 2018. – Vol. 98, № 7. – Art. 075011. <https://doi.org/10.1103/physrevd.98.075011>
7. Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm / B. Abi [et al.] (Muon $g - 2$ Collaboration) // *Phys. Rev. Lett.* – 2021. – Vol. 126, № 14. – Art. 141801.
8. Lautrup, B. E. On high order estimates in QED / B. E. Lautrup // *Phys. Lett. B.* – 1977. – Vol. 69, № 1. – P. 109–111. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90145-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90145-9)
9. Laursen, M. L. Borel transform technique and the n -bubble-diagram contribution to the lepton anomaly / M. L. Laursen, M. A. Samuel // *Phys. Rev. D.* – 1981. – Vol. 23, № 10. – P. 2478–2481. <https://doi.org/10.1103/physrevd.23.2478>
10. Kinoshita, T. Eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the muon / T. Kinoshita, B. Nizic, Y. Okamoto // *Phys. Rev. D.* – 1990. – Vol. 41, № 2. – P. 593–610. <https://doi.org/10.1103/physrevd.41.593>
11. Jegerlehner, F. The Anomalous Magnetic Moment of the Muon / F. Jegerlehner. – Springer Int. Publ. AG, 2017. – 693 p. – (Springer Tracts in Modern Physics). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-63577-4>
12. Kataev, A. L. Analytical eighth-order light-by-light QED contributions from leptons with heavier masses to the anomalous magnetic moment of electron / A. L. Kataev // *Phys. Rev. D.* – 2012. – Vol. 86, № 1. – Art. 013010. <https://doi.org/10.1103/physrevd.86.013010>
13. Laursen, M. L. The n -bubble diagram contribution to $g - 2$ of the electron. Mathematical structure of the analytical expression / M. L. Laursen, M. A. Samuel // *Phys. Lett. B.* – 1980. – Vol. 91, № 2. – P. 249–252. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(80\)90443-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90443-8)
14. Aguilar, J.-P. Muon anomaly from lepton vacuum polarization and the Mellin-Barnes representation / J.-P. Aguilar, E. de Rafael, D. Greynat // *Phys. Rev. D.* – 2008. – Vol. 77, № 9. – Art. 093010. <https://doi.org/10.1103/physrevd.77.093010>
15. Solovtsova, O. P. On the contribution of three-bubble diagrams to $(g-2)_L$ / O. P. Solovtsova, V. I. Lashkevich, A. V. Sidorov // *Nonlinear Dynamics and Applications: Proc. XXVI Annual Seminar NPCS'2019, May 21–24. – Minsk, 2019. – Vol. 25. – P. 103–112.*
16. Anomalous magnetic moment with heavy virtual leptons / A. Kurz [et al.] // *Nucl. Phys. B.* – 2014. – Vol. 879. – P. 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2013.11.018>
17. Bateman, H. Higher Transcendental Functions / H. Bateman, A. Erdelyi. – New York, McGraw-Hill, 1953. – Vol. 1. – 302 p.
18. Boos, E. E. A method of evaluating massive Feynman integrals / E. E. Boos, A. I. Davydychev // *Theor. Math. Phys.* – 1991. – Vol. 89, № 1. – P. 1052–1063. <https://doi.org/10.1007/bf01016805>
19. Friot, S. Asymptotics of Feynman diagrams and the Mellin–Barnes representation / S. Friot, D. Greynat, E. de Rafael // *Phys. Lett. B.* – 2005. – Vol. 628, № 1–2. – P. 73–84. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.08.126>

References

1. Lautrup B. E., Peterman A., Rafael E. Recent developments in the comparison between theory and experiments in quantum electrodynamics. *Physics Reports*, 1972, vol. 3, no. 3, pp. 193–259. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(72\)90011-7](https://doi.org/10.1016/0370-1573(72)90011-7)
2. Aoyama T., Asmussen N., Benayoun M., Bijmans J., Blum T., Bruno M. [et al.]. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. *Physics Reports*, 2020, vol. 887, pp. 1–166. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.07.006>

3. Schwinger J. S. Quantum Electrodynamics. III. The Electromagnetic Properties of the Electron – Radiative Corrections to Scattering. *Physical Review*, 1949, vol. 76, no. 6, pp. 790–817. <https://doi.org/10.1103/physrev.76.790>
4. Consa O. Something is wrong in the state of QED. *Arxiv* [Preprint], 2021. Available at: <https://arxiv.org/abs/2110.02078>. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.02078>
5. Parker R. H., Chenghui Yu, Zhong W., Estey B., Müller H. Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model. *Science*, 2018, vol. 360, no. 6385, pp. 191–195. <https://doi.org/10.1126/science.aap7706>
6. Davoudiasl H., Marciano W. J. Tale of two anomalies. *Physical Review D*, 2018, vol. 98, no. 7, art. 075011. <https://doi.org/10.1103/physrevd.98.075011>
7. Abi B., Albahri T., Al-Kilani S., Allspach D., Alonzi L. P. Anastas A. [et al.] (Muon $g - 2$ Collaboration). Measurement of the positive muon anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm. *Physical Review Letters*, 2021, vol. 126, no. 14, art. 141801.
8. Lautrup B. E. On high order estimates in QED. *Physics Letters B*, 1977, vol. 69, no. 1, pp. 109–111. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90145-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90145-9)
9. Laursen M. L., Samuel M. A. Borel transform technique and the n -bubble-diagram contribution to the lepton anomaly. *Physical Review D*, 1981, vol. 23, no. 10, pp. 2478–2481. <https://doi.org/10.1103/physrevd.23.2478>
10. Kinoshita T., Nizic B., Okamoto Y. Eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the muon. *Physical Review D*, 1990, vol. 41, no. 2, pp. 593–610. <https://doi.org/10.1103/physrevd.41.593>
11. Jegerlehner F. *The Anomalous Magnetic Moment of the Muon*. Springer Tracts in Modern Physic. Springer International Publishing AG, 2017. 693 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-63577-4>
12. Kataev A. L. Analytical eighth-order light-by-light QED contributions from leptons with heavier masses to the anomalous magnetic moment of electron. *Physical Review D*, 2012, vol. 86, no. 1, art. 013010. <https://doi.org/10.1103/physrevd.86.013010>
13. Laursen M. L., Samuel M. A. The n -bubble diagram contribution to $g - 2$ of the electron. Mathematical structure of the analytical expression. *Physics Letters B*, 1980, vol. 91, no. 2, pp. 249–252. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(80\)90443-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90443-8)
14. Aguilar J.-P., Rafael E. de, Greynat D. Muon anomaly from lepton vacuum polarization and the Mellin-Barnes representation. *Physical Review D*, 2008, vol. 77, no. 9, art. 093010. <https://doi.org/10.1103/physrevd.77.093010>
15. Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Sidorov A. V. On the contribution of three-bubble diagrams to $(g-2)_L$. *Nonlinear Dynamics and Applications*. Proc. XXVI Annual Seminar NPC'S'2019, May 21–24. Minsk, 2019, vol. 25, pp. 103–112.
16. Kurz A., Liu T., Marquard P., Steinhauser M. Anomalous magnetic moment with heavy virtual leptons. *Nuclear Physics B*, 2014, vol. 879, pp. 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2013.11.018>
17. Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*. Vol. 1. New York, McGraw-Hill, 1953. 302 p.
18. Boos E. E., Davydychev A. I. A method of evaluating massive Feynman integrals. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1991, vol. 89, no. 1, pp. 1052–1063. <https://doi.org/10.1007/bf01016805>
19. Friot S., Greynat D., Rafael E de. Asymptotics of Feynman diagrams and the Mellin–Barnes representation. *Physics Letters B*, 2005, vol. 628, no. 1–2, pp. 73–84. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.08.126>

Інфармацыя аб аўтарах

Лашкевич Василий Иванович – кандидат фізіка-матэматычных навук, доцент кафедры «Вышшая матэматыка», Гомельскі дзяржаўны тэхнічны ўніверсітэт імя П. О. Сухого (пр. Октября, 48, 246029, Гомель, Рэспубліка Беларусь). E-mail: lashkevich@gstu.gomel.by

Соловцова Ольга Павловна – доктор фізіка-матэматычных навук, галоўны навуковы супрацоўнік навучна-даследавальскай часткі, Гомельскі дзяржаўны тэхнічны ўніверсітэт імя П. О. Сухого (пр. Октября, 48, 246029, Гомель, Рэспубліка Беларусь); вядучы навуковы супрацоўнік лабараторыі тэарэтычнай фізікі, Аб'яднаны інстытут ядэрных даследаванняў (ул. Жолио-Кюры, 6, 141980, Дубна, Масковская обл., Расійская Федэрацыя). E-mail: olsol07@mail.ru, solovtsova@gstu.gomel.by

Теряев Олег Валерьянович – доктор фізіка-матэматычных навук, прафесар, начальнік аддзела Лабараторыі тэарэтычнай фізікі імя Н. Н. Боголюбова, Аб'яднаны інстытут ядэрных даследаванняў (ул. Жолио-Кюры, 6, 141980, Дубна, Масковская обл., Расійская Федэрацыя). E-mail: teryav@theor.jinr.ru

Information about the authors

Vasil I. Lashkevich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Sukhoi State Technical University of Gomel (48, Octiabrya Ave., 246746, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: lashkevich@gstu.gomel.by

Olga P. Solovtsova – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher of the Scientific Research Center, Sukhoi State Technical University of Gomel (48, Octiabrya Ave., 246746, Gomel, Republic of Belarus); Leading Researcher of the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research (6, Joliot-Curie Str., 141980, Dubna, Moscow Region, Russian Federation). E-mail: olsol07@mail.ru, solovtsova@gstu.gomel.by

Oleg V. Teryaev – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research (6, Joliot-Curie Str., 141980, Dubna, Moscow Region, Russian Federation). E-mail: teryav@theor.jinr.ru