УДК 539.375

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ПОВРЕЖДЕНИЯМИ

Г. П. ТАРИКОВ

Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта», г. Гомель

В. В. КОМРАКОВ, В. Н. ПАРХОМЕНКО, А. Т. БЕЛЬСКИЙ

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Введение

В настоящее время существует два подхода к определению предельного состояния нагруженного тела. Классические и ряд новых критериев прочности [1]–[3] дают возможность установить предельное состояние материалов в точке. Согласно этим критериям предельная нагрузка для тела будет соответствовать такому случаю, когда предельное состояние материала достигнет во всех точках опасного сечения. В противоположность этому критерии механики разрушения [2]–[4] позволяют найти предельную нагрузку для тела с трещиной, когда критические напряжения имеют место в весьма малом объеме тела.

Целью настоящей работы является рассмотрение нового метода определения предельного состояния элементов конструкции с повреждениями, который основан на совместном использовании критериев прочности материала механики сплошной среды и механики разрушения.

Описание метода

Из экспериментальных данных известно, что в момент разрушения элемента конструкции, имеющего повреждения, предельное напряженное состояние не достигается по всему ослабленному сечению. При некоторой нагрузке возле повреждения в опасном сечении возникает зона предельного состояния (трещина) материала. В этой зоне будет наблюдаться нарушение сплошности материала, что эквивалентно образованию трещины. При дальнейшем росте нагрузки зона предельного состояния будет увеличиваться до тех пор, пока трещина не достигнет критической длины. Затем произойдет практически мгновенное разрушение элемента конструкции или конструкции в целом. За критерий прочности сплошного материала принят критерий статического разрушения пластичных материалов, дополненный условием отрыва:

$$\sigma_i \geq \sigma_B \cup \sigma_1 \geq S_k,$$

где σ_i – интенсивность напряжений; σ_B – предел прочности; σ_1 – главное напряжение; $\cup$ – знак логического суммирования; S_k – истинное сопротивление отрыву.

В качестве условия разрушения используется условие Ирвина:

$$K_1 = K_{1c},$$

где K_1 и K_{1c} – коэффициент интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва и его критическое значение в случае плоского напряженного состояния.

Определение предельного состояния элементов конструкции с повреждениями с использованием предлагаемого метода можно разделить на следующие этапы:

1. Определяется напряженное состояние элемента конструкции (рис. 1, *а*) и выбирается одно или несколько опасных сечений. Напряженное состояние находится при некотором заданном значении внешних силовых, температурных и других воздействий.

2. Затем эти внешние воздействия увеличиваются пропорционально в одном отношении. При некотором значении внешних воздействий в опасном сечении появляется зона предельного состояния материала.

3. Конструируется функция $g(t)$, которая устанавливает зависимость протяженности зоны предельного состояния материала от величины внешних воздействий.

4. Строится функция $f(t)$, которая определяет зависимость критической длины зоны предельного состояния материала от величины внешних воздействий.

5. Совместно решается численно или графически с помощью ЭВМ уравнение

$$f(t) - g(t) = 0$$

и находится критическое значение внешних воздействий, при котором будет иметь место полное разрушение элемента конструкции.

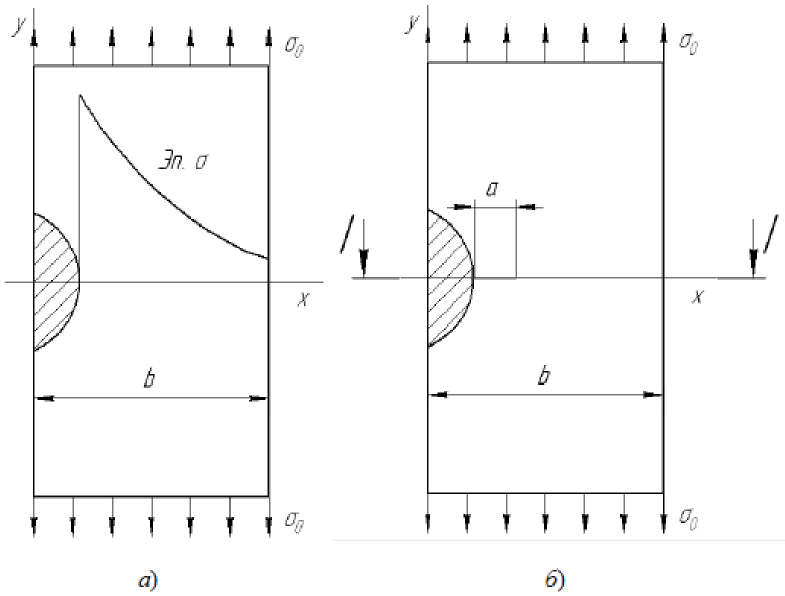

Рис. 1. Стенка трубы: *а* – без трещины; *б* – с трещиной

Покажем ход вычислений по предлагаемому методу:

1. Определяем напряженное состояние элемента конструкции с помощью ЭВМ методом конечных элементов при отсутствии трещины. Выбираем опасное сечение (сечение *I–I*) и напряжение в этом сечении представляем в виде полинома вида:

$$\sigma(x) = \sigma_0 \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n. \tag{1}$$

Если напряжения σ_x, σ_y, σ_z по величине одного порядка, то в формуле (1) вместо $\sigma(x)$ следует подставлять эквивалентное напряжение по четвертой теории прочности. Если же напряжение σ_y гораздо больше, чем σ_x и σ_z, то можно использовать первую теорию прочности. В результате получим

$$\sigma_0^{\text{пр}} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n = \sigma_B. \quad (2)$$

Здесь σ_B – предел прочности материала,

$$x = bt, \ \alpha_n = \beta_n b^n.$$

Из формулы (2) получаем

$$g(t) = \sigma_0^{\text{пр}} = \frac{\sigma_B}{\sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n}.$$

2. Теперь рассмотрим образец с трещиной (рис. 1, *б*). В этом случае будем иметь такое выражение для коэффициента интенсивности напряжений:

$$K_1 = \sigma_0 \sqrt{\pi a} F(t), \quad a = bt,$$

где a – длина трещины; $F(t)$ – поправочная функция, учитывающая геометрию конструктивного элемента.

Применяя условие разрушения Ирвина, получаем

$$f(t) = \sigma_0^{\text{пр}} = \frac{K_{1c}}{F(t)\sqrt{\pi a}},$$

где K_{1c} – критическое значение коэффициента интенсивности напряжений.

Решение уравнения

$$f(t) - g(t) = 0$$

можно получить графически (рис. 2) или численно с помощью ЭВМ.

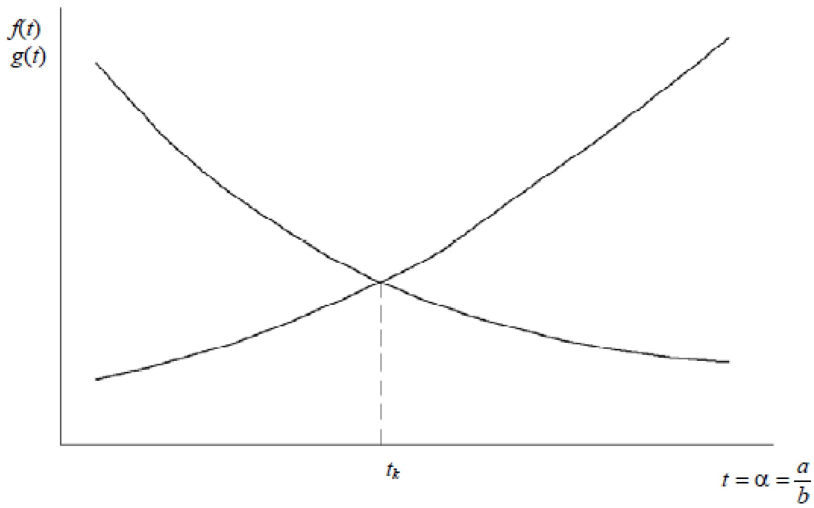

Рис. 2. Решение уравнения $f(t) - g(t) = 0$

Критическая длина трещины будет равна:

$$a_k = bt_k,$$

а предельное напряжение

$$\sigma_0^{\text{пр}} = f(t_k) = g(t_k).$$

Численный пример решения задачи

В рассматриваемом случае (рис. 1, *б*) опасным будет сечение *I–I*. Строим эпюру напряжений σ_y в этом сечении (рис. 3). По этим данным строим интерполяционный полином

$$\sigma_y(x) = 254{,}96 - 58{,}64 \cdot x + 10{,}35 \cdot x^2 - 0{,}994 \cdot x^3 + 0{,}053 \cdot x^4 - 0{,}0015 \cdot x^5 + 0{,}0000165 \cdot x^6.$$

Этот полином получен при σ_0 = 100 МПа. Переделаем его для некоторой величины σ_0. В результате получим:

$$\sigma_y(x) = \frac{\sigma_0}{100}(254{,}96 - 58{,}64 \cdot x + 10{,}35 \cdot x^2 - 0{,}994 \cdot x^3 + 0{,}053 \cdot x^4 - 0{,}0015 \cdot x^5 + 0{,}0000165 \cdot x^6).$$

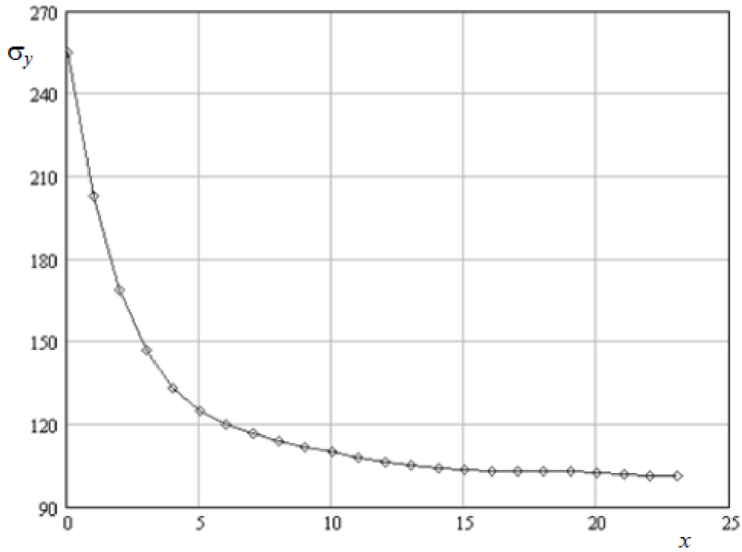

Рис. 3. Эпюра напряжений σ_y в сечении *I–I*

В границах зоны предельного состояния материала выполняется условие $\sigma_y(x) = \sigma_B$. В этом случае приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\sigma_0^{\text{пр}}}{100}(254{,}96 - 58{,}64 \cdot x + 10{,}35 \cdot x^2 - 0{,}994 \cdot x^3 + 0{,}053 \cdot x^4 - 0{,}0015 \cdot x^5 + 0{,}0000165 \cdot x^6) = \sigma_B.$$

Отсюда находим:

$$\sigma_0^{\text{пр}} = \frac{100 \cdot \sigma_B}{254{,}96 - 58{,}64 \cdot x + 10{,}35 \cdot x^2 - 0{,}994 \cdot x^3 + 0{,}053 \cdot x^4 - 0{,}0015 \cdot x^5 + 0{,}0000165 \cdot x^6} = g(x).$$

Функция $g(x)$ устанавливает зависимость предельного напряжения от величины зоны предельного состояния материала.

Построим функцию $f(a)$, которая показывает зависимость критической длины трещины от величины напряжения σ_0. Вводим в образец трещину, которой задаем значение a = 1, 2, 3, 5 мм. Определяем коэффициент интенсивности напряжений (КИН) по формуле [5]:

$$K_1 = (2\pi)^{1/2} \frac{(1+\nu)\mu}{4} \lim_{x \to a-0} \left[\frac{\upsilon(x,+0) - \upsilon(x,-0)}{(a-x)^{1/2}} \right],$$

где μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; a – длина трещины; υ – проекция вектора перемещения на ось y.

Как пример, рассмотрим последовательность вычисления величины K_1 для случая длины трещины равной 5 мм (табл. 1).

Таблица 1

Исходные данные

υ, мм	x, мм	y, мм	z, мм
0,21926	89,5	160	3
0,20196	89,5	159,5	3

$$K_1 = (2\pi)^{1/2} \frac{(1+0{,}33)2{,}7 \cdot 10^4}{4} \frac{(0{,}21926 - 0{,}20196)}{(0{,}5 \cdot 10^{-3})^{1/2}} = 17{,}4 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

Аналогично можно вычислить величину K_1 для других значений длины трещины. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты вычислений

Длина трещины, мм	1	2	3	5
K_1, **МПа · м$^{1/2}$**	14,2	16,0	16,9	17,4

График КИН показан на рис. 4.

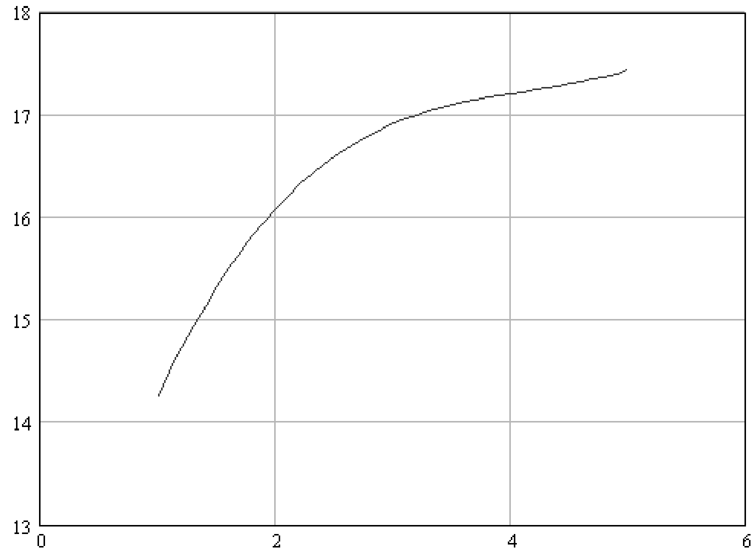

Рис. 4. График КИН

По полученным данным строим интерполяционный полином для КИН

$$K_1 = 10{,}9505 + 4{,}202917 \cdot a - 0{,}974 \cdot a^2 + 0{,}078583 \cdot a^3.$$

Этот полином получен при σ_0 = 100 МПа. Переделаем его для некоторой величины σ_0. В результате получим:

$$K_1 = \frac{\sigma_0}{100}\left(10{,}9505 + 4{,}202917 \cdot a - 0{,}974 \cdot a^2 + 0{,}078583 \cdot a^3\right).$$

Используя условия разрушения Ирвина, имеем:

$$\frac{\sigma_0^{\text{пр}}}{100}\left(10{,}9505 + 4{,}202917 \cdot a - 0{,}974 \cdot a^2 + 0{,}078583 \cdot a^3\right) = K_c.$$

Отсюда получаем

$$\sigma_0^{\text{пр}} = \frac{100 \cdot K_c}{10{,}9505 + 4{,}202917 \cdot a - 0{,}974 \cdot a^2 + 0{,}078583 \cdot a^3} = f(a).$$

Таким образом, при σ_B = 460 МПа и K_c = 36 МПа · м$^{1/2}$ имеем две функции $g(a)$ и $f(a)$:

$$g(a) = \frac{100 \cdot 460}{254{,}96 - 58{,}64 \cdot a + 10{,}35 \cdot a^2 - 0{,}994 \cdot a^3 + 0{,}053 \cdot a^4 - 0{,}0015 \cdot a^5 + 0{,}0000165 \cdot a^6};$$

$$f(a) = \frac{100 \cdot 36}{10{,}9505 + 4{,}202917 \cdot a - 0{,}974 \cdot a^2 + 0{,}078583 \cdot a^3}.$$

Затем необходимо решить уравнение

$$f(a) - g(a) = 0.$$

Решение этого уравнения удобнее выполнить графически (рис. 5). В результате находим $a_{\text{к}}$ = 1,359 мм; $\sigma_{\text{к}}$ = 239,5 МПа.

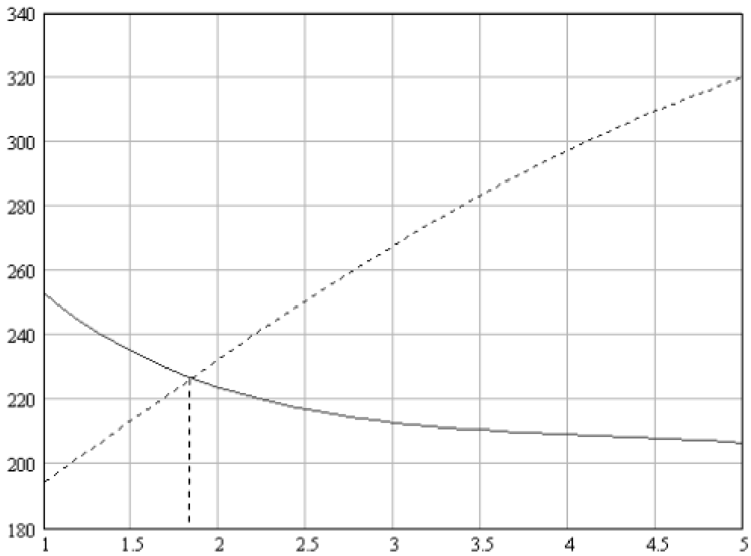

Рис. 5. Графическое решение уравнения $f(a) - g(a) = 0$

Если напряжение σ_0 станет равным $\sigma_0^{пр}$, трещина достигнет критической величины $a_к$. После этого начнется спонтанный рост трещины и в итоге трещина распространится вдоль сечения *I–I*, что приведет к разрушению элемента конструкции.

Заключение

Предлагаемый метод позволяет достаточно просто и с большой степенью достоверности определять критическое значение длины трещины и предельное напряжение, при которых происходит разрушение элемента конструкции. В связи с этим метод представляет значительный интерес при решении многочисленных задач инженерной практики.

Литература

1. Ковальчук, Б. И. Механика неупругого деформирования материалов и элементов конструкций / Б. И. Ковальчук, А. А. Лебедев, С. Э. Уманский. – К. : Наук. Думка, 1987. – 278 с.
2. Писаренко, Г. С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. – К. : Наук. Думка, 1976. – 416 с.
3. Махутов, Н. А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность / Н. А. Махутов. – М. : Машиностроение, 1981. – 272 с.
4. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 620 с.
5. Определение коэффициента интенсивности напряжений при различных коррозионных повреждениях с трещиной в стенке трубопровода / Г. П. Тариков [и др.] // Наукоемкие технологии. – 2009. – Т. 9, № 9. – С. 26–29.

Получено 20.09.2013 г.