Секция 3. СОДЕРЖАНИЕ, ДИДАКТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ ФИЗИКЕ, МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В ВУЗЕ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

УДК 378.147:51

Л.Л. Великович (Гомель, Беларусь)

ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПОДХОД К МАТЕМАТИКЕ И ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЮ

In this article the author proposes his based on fact conception of information view on content, subject and objectives of mathematics as a science. Some aspects of this approach and its application to teaching mathematics to both students and pupils are being discussed. It is also mentioned that the considered topic has been developed during the author's work on his own theory of problem solving, which was initiated by his acquaintance with TRIZ in 1989.

Есть в математике нечто,
вызывающее человеческий восторг
Ф. Хаусдорф

1. Что такое математика?

Для состоятельного ответа на этот каверзный вопрос двум известным ученым-математикам прошлого века Р. Куранту и Г. Роббинсу пришлось написать целую книгу [1]. Здесь же мы ограничимся следующим утверждением.

Математика – это игра по правилам, в соответствии с которыми строятся необходимые логические цепочки с целью получения полезной информации.

В сформулированном утверждении есть три основных компоненты: «игра по правилам», «логические цепочки», «полезная информация». Разберем, как говорится, «по косточкам» каждую из них.

Увы, у Человечества до сих пор нет универсального определения, что же такое «Игра». Поэтому выделим здесь лишь один, по-видимому, главный аспект этого понятия. В игровые отношения человек вступает добровольно и, значит, в любой момент может их разорвать.

Да, математика – это игра по жестким правилам, ни одно из которых не может быть нарушено или заменено на какое-то новое: достаточно одного такого нарушения и вся возводимая конструкция превратится в абсурд. В правилах содержатся инструкции по выполнению операций над математическими объектами, и, следовательно, каждое правило можно рассматривать как маленький алгоритм.

Понятие «математический объект» является основным неопределяемым понятием математики. И числа, и буквы, обозначающие числа, и выражения, и функции, и фигуры являются математическими объектами. По-видимому, математическими объектами не следует считать записи типа «a=» или «a+» и т.д., т.е. некорректно построенные сущности.

При разъяснении смысла термина «правило» мы использовали новый термин «операция». В нашем контексте мы будем его рассматривать как синоним термина «действие» (см. [2]) и считать основным неопределяемым понятием (наряду с еще тремя неопределяемыми понятиями: объект, субъект, связь).

Что такое «логическая цепочка», мы обсудим немного позже, а сейчас остановимся на важнейшем и очень востребованном в настоящее время понятии – «информация». Для наших целей удобным является так называемый фактологический подход [3, с. 80]. Под фактом будем понимать высказывание о наличии или отсутствии связи между объектами. В минимальном варианте речь идет о связной паре, причем в качестве ее вершин (составляющих) могут выступать либо два объекта из рассматриваемой предметной области, либо отдельный объект и некоторое его свойство. Например, свойство функции быть четной. Информация есть некоторая совокупность фактов. Полезной следует считать такую информацию, которая повышает вероятность достижения цели в целенаправленной деятельности (скажем, доказательстве теоремы или решении задачи) [4, с. 18].

Теперь пришла пора ответить на вопрос: Что же такое «логическая цепочка»? Под «логической цепочкой» мы будем понимать упорядоченный набор (последовательность) фактов, каждый из которых выводится из предыдущего на основании некоторого правила (или факта). Логическую цепочку символически можно записать в виде:

$$A = A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n = B,$$

где A – начальная посылка (или некоторое множество фактов-посылок), а B – требуемый конечный результат (или факт, необходимый для дальнейшего продвижения к цели). Процессы построения логических цепочек подчиняются объективным законам. Сформулируем некоторые из них в виде принципов: корректность; непрерывность; экономичность; элементарность (максимальное дробление); принцип «вширь-вглубь-вширь» [5]. (Подробнее об этом см. в [6]).

Подводя некоторый промежуточный итог, можно сказать, что в классической математике мы добываем новую информацию путем построения логических цепочек. В качестве подтверждения приведем простенький пример из [4, с. 17]. «Когда математик доказывает теорему, что четырехугольник с попарно равными противоположными сторонами является параллелограммом, никто не сомневается, что получена новая информация, а именно: информация о существовании связи между равенством противоположных сторон и их параллельностью».

2. Информационный подход при изложении теории

С первых лекций я приучаю своих студентов к мысли о том, что все, что мы делаем в математике – это получение полезной информации (впрочем, как и при других видах разумной деятельности).

Приведу два ярких примера применения информационного подхода при чтении курса математического анализа.

Центральным (и очень сложным для восприятия) понятием этой математической дисциплины является понятие предела функции в точке. Вот как я подвожу студентов к необходимости его введения. Я начинаю лекционный курс с «Прелюдии», в которой произвожу ликвидацию ученической безграмотности в области математической культуры. Прелюдия, кроме стандартных сведений (скажем, из теории множеств и математической логики), содержит элементы моей теории решения задач (ТРЗ). В частности, я сообщаю студентам о двух аспектах математики:

- математика – искусство возможного;
- математика – исследование операций.

Рассмотрение темы «Предел функции в точке» я начинаю с основных операций над функциями (их шесть). Затем, отмечаю, что каждая из этих операций основана на одной базовой операции, а именно: операции вычисления значения функции в точке и предлагаю ее тщательно проанализировать. Далее мы рассматриваем в качестве примера, скажем, функцию $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ [7], значения которой могут быть вычислены во всех точках, кроме $x = -3$. Спрашивается, что делать в этом случае: ведь мы столкнулись с тупиковой ситуацией, в которой налицо полное отсутствие какой бы то ни было информации. К счастью, выход из тупика имеется: будем изучать поведение нашей функции в сколь угодно малых окрестностях точки $x = -3$, например, при $x = -3 \pm 0{,}1$; $x = -3 \pm 0{,}01$ и т.д. Оказывается, что при этом значения функции стабилизируются возле числа -6 и мы добыли практически полную информацию о поведении функции $f(x)$ в точке $x = -3$. Теперь остается сделать привычную запись: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3} = -6$ и формализовать сказанное на языке «$\varepsilon - \delta$». Вывод очевиден: добавление к обычным значениям функции ее предельных значений колоссально расширяет наши возможности получения локальной информации, т.е. информации о поведении функции в точке (по поводу локальной информации см. более подробно [8]).

В связи со сказанным я предлагаю студентам запомнить следующую символическую формулу:

$$\text{ОА} + \text{ОПП} = \text{МА},$$

где ОА – операции алгебры; ОПП – операция предельного перехода; МА – математический анализ.

В конце данного раздела я еще раз подвожу итог в виде следующих рассуждений. Пусть у нас имеются в качестве входных данных число x_0 и функция $f(x)$. Тогда представляются две возможности:

а) $x_0 \in D(f)$, т.е. значение функции $f(x)$ в точке x_0 существует и $f(x_0)$ – число;

б) $x_0 \notin D(f)$. В этом случае опять представляются две возможности: либо существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и тогда можно считать, что мы обладаем полной информацией о поведении функции $f(x)$ в точке x_0, либо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует. С целью получения хотя бы частичной информации мы далее вводим понятия односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0: $f(x_0 \pm 0)$. Этот процесс сбора информации можно продолжать (см., например, предел функции по базе и т.п.).

Второй пример мы возьмем из темы «Дифференциальное исчисление функций одного переменного». Как известно, ее итогом является «Общая схема исследования поведения функций», содержащая 8–9 пунктов-вопросов, на которые нужно ответить для получения необходимой информации о рассматриваемой функции (в ТРИЗ аналогичный подход к исследованию технической системы называют методом контрольных вопросов). Именно при работе по этой схеме мы строим связные пары типа «объект-свойство». Отмечу еще одну интересную особенность этой конструкции. Всю информацию, которую мы, работая по ней, собираем, можно разбить на три класса:

а) точечная (локальная): точки экстремума, перегиба, вертикальных асимптот;

б) интервальная: интервалы монотонности, выпуклости-вогнутости, знакопостоянства;

в) глобальная: область определения, область значений, четность, нечетность, периодичность, наибольшее-наименьшее значения, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Такое ранжирование облегчает учащимся запоминание и работу по данной схеме.

3. Информационный подход при решении задач

Здесь я остановлюсь только на одном из его проявлений. Все методы, которые мы используем при решении задач или доказательстве теорем, можно разбить на два класса: универсальные и специальные. К универсальным следует отнести такие методы как разбиение на случаи (я его называю методом альтернатив), от противного, математической индукции. Однажды поздно ночью я понял, что мне удалось обнаружить новый универсальный метод, которому я дал название «метод связных пар» [2]. Впрочем, новизна его состояла лишь в том, что постоянно применяемую людьми процедуру я решился выделить в качестве самостоятельного метода. Связные пары, как минимальные носители информации, вездесущи. Особенно часто они используются в геометрии (точка, инцидентная прямой, равные треугольники, подобные треугольники, гомотетичные фигуры и т.п.). Однако и в алгебре этот метод часто приносит замечательные плоды. Приведу только один пример. Решить неравенство:

$$\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2<\frac{2x^2+72}{x^2-36}.$$

Решение.

Связь между объектами $\frac{x+6}{x-6}$ и $\frac{x-6}{x+6}$ очевидна: $\frac{x+6}{x-6}\cdot\frac{x-6}{x+6}=1$ (1). Но, к сожалению, эта информация в нашей задаче бесполезна. Зато, если мы подметим другую связь между ними: $\frac{x+6}{x-6}+\frac{x-6}{x+6}=\frac{2x^2+72}{x^2-36}$ (2), то, имея данную информацию, завершить решение не составит труда.

Примечание. Подчеркнем, что связь (1) носит универсальный характер: поскольку результат умножения двух выражений равен 1, то они взаимно обратны. Что же касается равенства (2), то оно имеет ценность только в контексте нашей задачи и, значит, носит специальный характер.

4. Заключительные замечания

1). Структура ТРЗ и ее инструменты частично представлены в [2, 6]. Здесь же приведем лишь два фундаментальных факта.

• Основная парадигма ТРЗ – решение задачи есть процесс добычи полезной информации. Поэтому главной целью ТРЗ является поиск и изучение способов организации этого процесса.

• Стратегия решения любой задачи – субъект конструирует с помощью операций (последовательно или параллельно) разноуровневые объекты с целью добычи полезной информации до тех пор, пока не получит количество информации, достаточное для ответа на вопрос задачи.

2). Отметим некоторые особенности ТРЗ.

а) Универсальность теории проявляется в том, что ее закономерности достаточно часто переносятся и на другие науки (например, физику).

б) ТРЗ лежит вне математики, несмотря на то, что она изучает закономерности процессов решения математических задач. (Поэтому я ее называю Метаматематика-2).

в) ТРЗ не преследует цель создать универсальный алгоритм решения задач (в отличие от ТРИЗ, где Г.С. Альтшуллер предпринял попытку создания АРИЗ).

3). Никакие хорошие методики изложения материала не помогут, если у слушателей будут отсутствовать мотивация обучения и тезаурус знаний. Над этими проблемами я не один раз размышлял (см., например, [5]).

Список литературы:

1. Курант, Р. Что такое математика / Р. Курант, Г. Роббинс. – М. : Просвещение, 1967. – 559 с.
2. Velikovich, L.L. Information approach to the theory of problem solving: first steps / Л.Л. Великович // ТРИЗ-ФЕСТ 2011 : сб. тр. науч.-практ. конф., С.-Петербург, 20-23 июля 2011 г. – С. 138-142.
3. Симонович, С.В. Общая информатика. Новое издание / С.В. Симонович. – СПб. : Питер, 2007. – 428 с.
4. Гейн, А.Г. Справочник по информатике для школьников / А.Г. Гейн, А.И. Сенокосов. – Екатеринбург : Y–Фактория, 2003. – 346 с.
5. Великович, Л.Л. Математика атакует первокурсника. Подходы к решению проблемы / Л.Л. Великович // Актуальные проблемы и перспективы преподавания математики : сб. науч. ст. III Междунар. науч.-практ. конференции, Юго-Зап. Гос. ун-т, Курск, 15-16 ноября 2012 г. – С. 114-123.
6. Великович, Л.Л. Подготовка к экзаменам по математике : учеб. пособие для абитуриентов и учащихся 9–11 кл. : в 2 ч. / Л.Л. Великович. – М. : Народ. образование, 2006. – 610 с.
7. Великович, Л.Л. Введение в общий курс математики технического университета (моя концепция) / Л.Л. Великович // Учебник математики, физики, информатики и астрономии в си-

стеме среднего и высшего образования : сб. материалов Республ. науч.-практ. конф., Могилев, 20-22 окт. 2009 г. – С. 8-10.
8. Чечкин, А.В. Математическая информатика / А.В. Чечкин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 416 с.

УДК 372.853

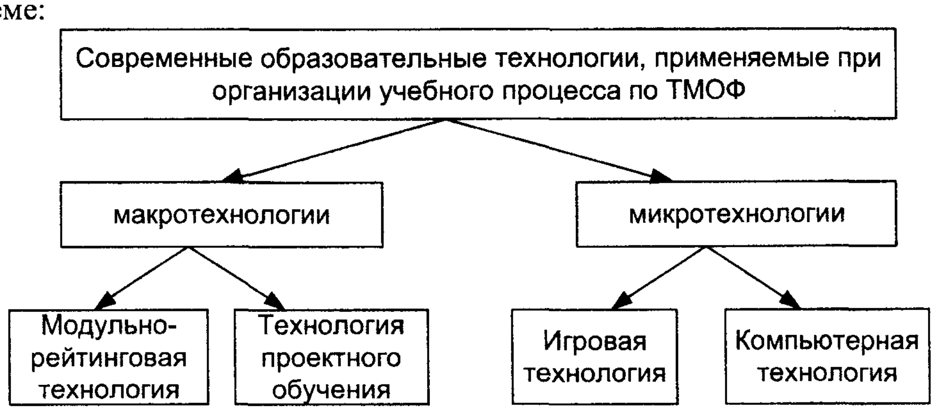
Т.Ю. Герасимова (Могилев, Беларусь)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЕЙ ФИЗИКИ

This paper describes an author's technology of preparing students for professional careers at school, which was developed and tested in practice for 20 years. It is based on modeling of an educational process in physics, which is realized through writing methodical projects. The project virtually presents all parts of professional activity of the teacher of physics. The content and the procedural part of the learning and cognitive activity of students are described in organizational and methodological materials.

Сокращение учебных часов на профессиональную подготовку учителей физики согласно новым учебным планам (с 422 аудиторных часов по плану 1995 г. до 150 часов по плану 2008 г.) и увеличение часов на самостоятельную работу (106 часов по плану 2008 г.) приводит к изменению методов организации учебных занятий по теории и методике обучения физике (ТМОФ). Все больше внимания уделяется самостоятельной работе студентов под руководством преподавателя над той или иной методической проблемой. Изменяется роль и деятельность самого преподавателя, ведущего лекционные занятия, и готовящего студентов к практической профессиональной деятельности.

Как показывает опыт работы, наиболее эффективными являются педагогические технологии, включающие методы активного обучения, которые ставят студентов в такое положение, находясь в котором они вынуждены вести поиск, переработку и реализацию учебной информации. Наиболее перспективными и получившими применение при обучении студентов по ТМОФ являются педагогические технологии, представленные на схеме:



Функциональная нагрузка этих технологий включает:
– организацию деятельности преподавателя;
– организацию преподавателем деятельности студентов (создание условий);
– организацию совместной деятельности преподавателя и студентов;
– организацию студентами своей деятельности;
– предвидение участниками педагогического процесса его возможных результатов;
– моделирование педагогического взаимодействия;