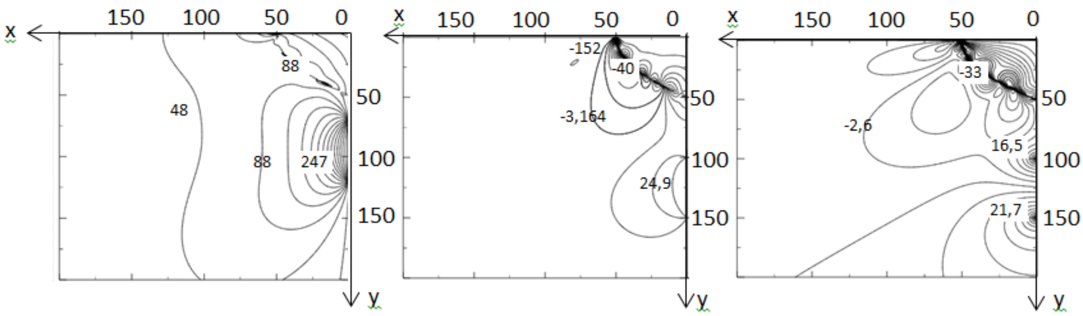

а) *б*) *в*)

Рис. 4. Поля напряжений:
$а-\sigma_{xx}^{(0)}(x,y)$; $б-\sigma_{yy}^{(0)}(x,y)$; $в-\ \sigma_{xy}^{(0)}(x,y)$ в металлическом стекле
в системе «полоса сдвига – трещина» при функции
распределения квазидислокаций, описываемой формулой (7)

В результате проведенного исследования была установлена зависимость между распределением напряжений в металлическом стекле и закономерностью изменения плотности квазидислокаций. Так, при плотности квазидислокаций, описываемой константой, были отмечены большие по значению напряжения у трещины, чем при нелинейной закономерности распределения квазидислокаций. Наибольшие напряжения были отмечены при синусоидной закономерности распределения казидислокаций. Стоит отметить, что ввиду случайности распределения квазидислокаций в металлическом стекле синусоидная закономерность отражает наиболее близкий к реальности вариант распределения дефектов в материале.

Литература

1. Рюмцев, А. А. Методика расчета полей напряжений у криволинйной полосы сдвига типа чешуйчатого навала, находящегося у поверхности металлического стекла / А. А. Рюмцев, О. М. Остриков // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. – 2015. – № 4 (94). – С. 39–46.
2. Влашевич, В. В. Метод численно-аналитического расчета полей напряжений в системе «механический клиновидный нанодвойник – трещина» при поперечном сдвиге / В. В. Влашевич, О. М. Остриков // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. – 2016. – № 4 (100). – 59 с.
3. Астафьев, В. И. Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара : Изд-во «Самарский университет», 2001. – 562 с.

УДК 530.1

МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА КУЛОНОВСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

В. Ю. Златина, В. Ю. Гавриш

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого, Республика Беларусь

Получена формула Резерфорда с использованием спектрального разложения функции Грина. В ходе работы авторы, используя метод функции комплексного переменного, получают выражение для функции Грина уравнения Шредингера с последующим применением для задачи рассеяния на сферически-симметричном потенциале.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, функция Грина, потенциал, формула Резерфорда.

GREEN'S FUNCTION METHOD FOR THE COULOMB POTENTIAL SCATTERING PROBLEM

V. Yu. Zlatina, V. Yu. Haurysh

Sukhoi State Technical University of Gomel, the Republic of Belarus

In the paper the Rutherford formula using the spectral Green's function expansion is obtained. In the course of the work the authors using the method of the complex variable function obtain expression for the Green's function of the Schrödinger equation with subsequent application for the spherically symmetric potential scattering problem.

Keywords: Schrödinger equation, Green's function, potential, Rutherford formula.

Задача рассеяния частицы в классической механике с учетом прицельного расстояния и скорости частиц решается известными методами. В квантовой механике меняется сама постановка вопроса, поскольку понятие траектории, а с нею и прицельного расстояния теряет смысл. В работе представлена процедура получения дифференциального сечения рассеяния на кулоновском потенциале с использованием функции Грина. Как результат работы с использованием метода функции комплексной переменной получена формула Резерфорда.

Функция Грина свободной частицы. Известно [1], что свободная частица описывается уравнением Шредингера

$$\hat{H}_0\, \psi^0_{\vec{k}}(\vec{r}) = E\, \psi^0_{\vec{k}}(\vec{r}), \tag{1}$$

гамильтониан $\hat{H}_0$ которого представлен оператором кинетической энергии

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta. \tag{2}$$

Волновая функция, соответствующая выражению (1), определяется соотношением

$$\psi^0_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}}. \tag{3}$$

В случае наличия оператора взаимодействия $\hat{V} = V(\vec{r})$ уравнение Шредингера примет вид

$$\left(\hat{H}_0 + \hat{V}\right)\psi(\vec{r}) = E\,\zeta(\vec{r}). \tag{4}$$

Для простоты будем полагать, что взаимодействие исчезает на больших расстояниях от силового центра, т. е. $V(\vec{r} \to \infty) = 0.$ Перепишем (4) в виде

$$\left(\hat{H}_0 - E\right)\psi(\vec{r}) = -\hat{V}\,\psi(\vec{r}), \tag{5}$$

решение которого будем проводить методом функции Грина. Для этого перейдем от дифференциального уравнения Шредингера (5) к эквивалентному интегральному уравнению

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} + \int G_0(E,\vec{r},\vec{r}')\, V(\vec{r}')\psi(\vec{r}')d\vec{r}', \tag{6}$$

где $G_0(E,\vec{r},\vec{r}')$ – функция Грина, соответствующая оператору $\hat{H}_0$ и удовлетворяющая уравнению

$$\left(E-\hat{H}_0\right)G_0(E,\vec{r},\vec{r}')=\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{7}$$

с дельта-функцией Дирака $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ [2]. Легко убедиться, что если $G_0(E,\vec{r},\vec{r}')$ является функцией Грина, соответствующей оператору $\hat{H}_0$, то справедливо так называемое спектральное разложение или спектральное представление функции Грина [1]

$$G_0(E,\vec{r},\vec{r}')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n^0(\vec{r})\psi_n^{*0}(\vec{r}')}{E_0-E_n}, \tag{8}$$

которое в случае непрерывного спектра оператора $\hat{H}_0$ определяется интегралом вида

$$G_0(E,\vec{r},\vec{r}')=\int\frac{\psi_\chi^0(\vec{r})\psi_\chi^{*0}(\vec{r}')}{E_0-E_n}\frac{d\vec{\chi}}{(2\pi)^3}. \tag{9}$$

Выполняя несложные преобразования, связанные с интегрированием по направлениям вспомогательного вектора $\vec{\chi}$, получаем выражение

$$G_0(E,\vec{r},\vec{r}')=\frac{m}{2\pi^2\hbar^2}\frac{1}{i|\vec{r}-\vec{r}'|}\int\frac{e^{i|\vec{\chi}||\vec{r}-\vec{r}'|}}{\frac{2mE_0}{\hbar^2}-|\vec{\chi}|^2}\frac{d\vec{\chi}}{(2\pi)^3}, \tag{10}$$

в котором учтено, что $|\vec{k}|=\sqrt{2mE_0/\hbar^2}$.

Интеграл (10) вычислим с помощью техники вычетов [3]. Рассмотрим два способа обхода полюсов: добавим к положительной вещественной величине E_0 малую добавку $\pm i\varepsilon$. Соответствующие выражения для функции Грина обозначим индексами (+) или (–):

$$G_0^{(\pm)}(E,\vec{r},\vec{r}')=\lim_{\varepsilon\to 0}G_0(E\pm i\varepsilon,\vec{r},\vec{r}'), \tag{11}$$

вычисление которых приводит к

$$\begin{gathered}G_0^{(+)}(E,\vec{r},\vec{r}')=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{i|\vec{k}||\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|},\\ G_0^{(-)}(E,\vec{r},\vec{r}')=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{-i|\vec{k}||\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.\end{gathered} \tag{12}$$

Случай расходящейся волны соответствует $G_0^{(+)}(E,\vec{r},\vec{r}')$, с учетом (6) приходим к

$$\psi(\vec{r})=\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}-\int\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{i|\vec{k}||\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}V(\vec{r}')\psi(\vec{r}')d\vec{r}', \tag{13}$$

откуда путем сравнения с общим выражением получаем [1], что амплитуда рассеяния определяется функцией Грина (12) и явным видом оператора взаимодействия $\hat{V} = V(\vec{r})$.

Упругое рассеяние на кулоновском потенциале. Определим выражение для дифференциального сечения на сферически-симметричном потенциале

$$V(|\vec{r}|) = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{|\vec{r}|}, \tag{14}$$

где Z_1, Z_2 – заряды мишени и налетающей частицы; e – элементарный заряд [1]. В случае упругого рассеяния, когда импульсы начальной и конечной частиц равны $|\vec{k}_0| = |\vec{k}|$, получаем:

$$|\vec{k}_0 - \vec{k}| = \sqrt{k_0^2 + k^2 - 2|\vec{k}_0||\vec{k}|\cos\theta} = 2|\vec{k}|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{15}$$

Проводя интегрирование по телесному углу выражения для амплитуды рассеяния

$$f\left(\vec{k}',\vec{k}\right) = -\int \frac{m}{2\pi\hbar^2} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}'} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}')d\vec{r}' \tag{16}$$

с последующей подстановкой (16) в выражение для дифференциального сечения

$$d\sigma = \left| f\left(\vec{k}',\vec{k}\right)\right|^2 d\Omega, \tag{17}$$

приходим к

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z_1^2 Z_2^2 m^2}{\hbar^4 |\vec{k}_0 - \vec{k}|^2} \left| \int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}_0 - \vec{k}|\, r'\right) dr' \right|^2. \tag{18}$$

Для вычисления интеграла (18) воспользуемся следующим приемом:

$$\int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}_0 - \vec{k}|\, r'\right) dr' \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda r'} \sin\left(|\vec{k}_0 - \vec{k}|\, r'\right) dr'. \tag{19}$$

Используя комплексное представление тригонометрических функций, получаем искомый интеграл в следующем виде:

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda r'} \frac{e^{i|\vec{k}_0 - \vec{k}|r'} - e^{-i|\vec{k}_0 - \vec{k}|r'}}{2i} dr'. \tag{20}$$

После некоторых преобразований из выражения (20) получаем:

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda r'} \frac{e^{i|\vec{k}_0 - \vec{k}|r'} - e^{-i|\vec{k}_0 - \vec{k}|r'}}{2i} dr' = \frac{1}{2i} \lim_{\lambda\to 0} \left(\int_0^\infty e^{-(\lambda - i|\vec{k}_0 - \vec{k}|)r'} dr' - \int_0^\infty e^{-(\lambda + i|\vec{k}_0 - \vec{k}|)r'} dr' \right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \lim_{\lambda\to 0} \left(\frac{1}{\lambda - i|\vec{k}_0 - \vec{k}|} - \frac{1}{\lambda + i|\vec{k}_0 - \vec{k}|} \right) = \frac{1}{|\vec{k}_0 - \vec{k}|}. \tag{21}$$

Подстановка (21) в (18) приводит к

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z_1^2 Z_2^2}{\hbar^4 |\vec{k}_0 - \vec{k}|^4}, \tag{22}$$

или с использованием (15) окончательно получаем:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z_1^2 Z_2^2}{16E^2} \sin^{-4}\left(\frac{\vartheta}{2}\right). \tag{23}$$

Полученное выражение называют формулой Резерфорда [1].

Работа посвящена методу функции Грина для задачи квантовой теории рассеяния. В ходе работы было получено выражение для рассеянной волны в борновском приближении. Данные соотношения использованы для вычисления дифференциального сечения на сферически-симметричном потенциале.

Литература

1. Давыдов, А. С. Квантовая механика : учеб. пособие / С. А. Давыдов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 704 с.
2. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1967. – 436 с.
3. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 749 с.

УДК 621.778.073

ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ СНИЖЕНИЯ ОБРЫВА ПРОВОЛОКИ ПРИ ВОЛОЧЕНИИ

С. И. Прач, В. П. Прытков

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого, Республика Беларусь

Волочение проволоки – это процесс обработки металла давлением, при котором последний постепенно однократно или многократно протягивается через специальный волочильный инструмент, предназначенный для поэтапного уменьшения поперечного сечения исходной заготовки. Наиболее важной проблемой при волочении проволоки является ее обрывность. В данной работе исследованы некоторые способы снижения обрыва проволоки.

Ключевые слова: волочение, проволока, коэффициент трения, пластичность, обрыв проволоки.

INVESTIGATION OF WAYS TO REDUCE WIRE BREAKAGE DURING DRAWING

S. I. Prach, V. P. Prytkov

Sukhoi State Technical University of Gomel, the Republic of Belarus

Wire drawing is a process of metal processing by pressure, in which the latter is gradually stretched once or repeatedly through a special drawing tool designed to gradually reduce the cross–section of the initial workpiece. The most important problem when drawing wire is its breakage. In this paper, some ways of reducing wire breakage.

Keywords: drawing, wire, coefficient of friction, plasticity, wire breakage.