СЕКЦИЯ «ТЕОРИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ»

Председатель – Тимошин С.И., Максименко Н.В.

В.В. Андреев, В.Ю. Гавриш

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

ВЫЧИСЛЕНИЕ ШИРИН РАСПАД ВЕКТОРНЫХ БОЗОНОВ МЕТОДОМ БАЗИСНЫХ СПИНОРОВ

Введение

Цель данной статьи – продемонстрировать, как с помощью метода базисных спиноров без вычисления шпуров матриц Дирака можно вычислять наблюдаемые величины процессов взаимодействия с участием фермионов. В качестве примера, рассмотрим процессы распада векторных бозонов в лептонную пару. Изучение этих процессов представляет интерес с точки зрения извлечения таких параметров Стандартной Модели (СМ), как угол Вайнберга–Салама, константы взаимодействия и др.

1. Кинематика распада $1 \to 2$

Для расчетов наблюдаемых рассмотрим процесс распада векторного бозона массы М в пару лептонов $B(p,\sigma) \to l\left(k_1,\lambda_{k_1}\right) + \bar{l}\left(k_2,\lambda_{k_2}\right)$ в системе покоя мезона. Тогда 4-импульсы бозонов и лептонов запишутся в виде:

$$p^{\mu} = (M, 0, 0, 0),$$
$$k_1^{\mu} = (E_1, |\vec{k}|\sin\theta, 0, |\vec{k}|\cos\theta), \quad k_2^{\mu} = (E_2, -|\vec{k}|\sin\theta, 0, -|\vec{k}|\cos\theta), \tag{1}$$

а вектора поляризации $\varepsilon_{\sigma}^{\mu}(p)$ бозона равны

$$\varepsilon_0 = (0,0,0,1), \quad \varepsilon_{\pm} = (0, 1/\sqrt{2}, \pm i/\sqrt{2}, 0) \tag{2}$$

для продольной поляризации $(\sigma = 0)$ и поперечной поляризации $\sigma = \pm 1$ векторного бозона соответственно. Из законов сохранения следует, что

$$|\vec{k}|^2 = \frac{\left(M^2 + m_2^2 - m_1^2\right)^2}{4M^2} - m_2^2, \quad E_{1,2} = \frac{M^2 + m_{1,2}^2 - m_{2,1}^2}{2M}. \tag{3}$$

Наблюдаемая величина – дифференциальная ширина распада бозона $d\Gamma$ имеет вид [1]:

$$dГ^{\sigma}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}} = \frac{1}{32\pi^2}\frac{|\vec{k}|}{M^2}|T^{\sigma}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}|^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \qquad (4)$$

где $T^{\sigma}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}$ – матричный элемент, явный вид которого найдем по правилам Фейнмана для СМ.

2. Расчет матричного элемента $B(p,\sigma)\to l\left(k_1,\lambda_{k_1}\right)+\overline{l}\left(k_2,\lambda_{k_2}\right)$

В низшем порядке теории возмущений диаграмма Фейнмана распада векторного бозона изображена на рисунке 1.

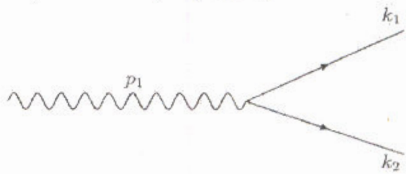

Рисунок 1 – Диаграмма Фейнмана для распада векторного бозона

Исходя из правил Фейнмана [2], запишем общее выражение для амплитуды распада $B(p,\sigma)\to l\left(k_1,\lambda_{k_1}\right)+\overline{l}\left(k_2,\lambda_{k_2}\right)$

$$T^{\sigma}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2}} = -\sqrt{4\pi\alpha}\cdot\bar{u}_{\lambda_{k1}}(k_1,m_1)\hat{\varepsilon}_{\sigma}\left[\sum_{\rho=-1}^{1} g_{\rho}\omega_{\rho}\right]\upsilon_{\lambda_{k2}}(k_2,m_2). \qquad (5)$$

Константы взаимодействия в (5) зависят от сорта бозона (Z^0, $W^{\pm}$) и конечного состояния, $\omega_{\pm}=\frac{1\pm\gamma_5}{2}$ – проекционный оператор. Вычисление $T^{\sigma}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2}}$ проведем с помощью метода базисных спиноров (МБС) [3]. Изложим кратко основные соотношения МБС.

Спинор Дирака $W^{A}_{\lambda_p}(p,s_p)$ [4] для массивного фермиона (A = 1) и антифермиона (A = – 1) с 4-импульсом p и произвольным вектором поляризации s_p может быть записан в виде [1]:

$$W^{A}_{\lambda_p}(p,s_p)=\frac{\left(\hat{p}+Am_p\right)\left(1+\lambda_p\gamma_5\hat{s}_p\right)}{2\sqrt{b_{-1}(p+m_p s_p)}}u_{-A\lambda_p}(b_{-1}), \qquad (6)$$

где $u_{\lambda}(b_{-1})$– базисный спинор. Для безмассового базисного спинора справедливы соотношения:

$$\hat{b}_{-1}u_{\lambda}(b_{-1})=0, \qquad \hat{b}_1 u_{-\lambda}(b_{-1})=u_{\lambda}(b_1), \qquad (7)$$
$$\hat{n}_{\lambda}u_{-\rho}(b_{-1})=\delta_{\lambda,\rho}u_{\rho}(b_{-1}), \quad \omega_{\lambda}u_{\rho}(b_A)=\delta_{\lambda,\rho}u_{\rho}(b_A),$$

где $\widetilde{b}_A=2b_A=(1,0,0,A)$ и $\widetilde{n}_{\lambda}=2n_{\lambda}=(0,\lambda,i,0)$ – вектора изотропной тетрады. Для BDKS–поляризационных состояний конечных фермионов (антифермионов) соотношение (6) примет вид [1]:

$$W^{A}_{\lambda_p}(p)=\frac{\hat{p}+Am_p}{\sqrt{(p\cdot\tilde{b}_{-1})}}u_{-A\lambda_p}(b_{-1})\,. \tag{8}$$

С помощью уравнений (7) определим действие матрицы Дирака на безмассовый базисный спинор:

$$\gamma^{\mu}u_{\lambda}(b_A)=\tilde{b}^{\mu}_{A}u_{-\lambda}(b_{-A})-A\cdot\tilde{n}^{\mu}_{-A\times\lambda}u_{-\lambda}(b_A)\,. \tag{9}$$

Используя соотношение (9), нетрудно получить действие и двух матриц Дирака на безмассовый базисный спинор:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}u_{\lambda}(b_A)=(\tilde{b}^{\mu}_{A}\cdot\tilde{n}^{\nu}_{-A\times\lambda}+\tilde{n}^{\mu}_{A\times\lambda}\cdot\tilde{n}^{\nu}_{-A\times\lambda})u_{\lambda}(b_A)-A(\tilde{b}^{\mu}_{A}\cdot\tilde{n}^{\nu}_{-A\times\lambda}-\tilde{n}^{\mu}_{-A\times\lambda}\cdot\tilde{b}^{\nu}_{A})u_{\lambda}(b_{-A})\,. \tag{10}$$

Важным свойством безмассовых базисных спиноров является соотношение полноты:

$$\sum_{\lambda,A=-1}^{1}u_{\lambda}(b_A)\bar{u}_{-\lambda}(b_{-A})=1\,. \tag{11}$$

Спинорные произведения базисных спиноров задаются соотношениями:

$$\bar{u}_{\lambda}(b_C)u_{\rho}(b_A)=\delta_{\lambda,-\rho}\delta_{C,-A}\,. \tag{12}$$

Соотношения (6), (9) и (12) и составляют основу МБС.

С помощью МБС рассчитаем $T^{\sigma}_{\lambda_{k2},\lambda_{k1}}$ (см. (5)) в терминах скалярных произведений физических и изотропной тетрады векторов, используя соотношения (8)-(12):

$$\begin{aligned}
T^{\sigma}_{\lambda_{k2},\lambda_{k1}}=&\frac{-\sqrt{4\pi\alpha}}{\sqrt{(k_2\cdot\tilde{b}_{-1})}\sqrt{(k_1\cdot\tilde{b}_{-1})}}\Big[\Big\{((k_2\cdot\tilde{b}_{-1})(\varepsilon_{\sigma}\cdot\tilde{b}_{+1})+(k_2\cdot\tilde{n}_{\lambda_{k2}})(\varepsilon_{\sigma}\cdot\tilde{n}_{-\lambda_{k2}}))(k_1\cdot\tilde{b}_{-1})-\\
&-\Big\{(k_1\cdot\tilde{n}_{\lambda_{k2}})(\varepsilon_{\sigma}\cdot\tilde{b}_{-1})-(\varepsilon_{\sigma}\cdot\tilde{n}_{\lambda_{k2}})(k_2\cdot\tilde{b}_{-1})\Big\}(k_1\cdot\tilde{n}_{\lambda_{k2}})\Big\}g_{-\lambda_{k2}}\delta_{\lambda_{k1},-\lambda_{k2}}+\\
&+\Big\{(\varepsilon_{\sigma}\cdot\tilde{b}_{-1})(k_1\cdot\tilde{n}_{\lambda_{k2}})-(\varepsilon_{\sigma}\cdot\tilde{n}_{\lambda_{k2}})(k_1\cdot\tilde{b}_{-1})\Big\}m_2g_{\lambda_{k2}}\delta_{\lambda_{k1},\lambda_{k2}}+\Big\{(k_2\cdot\tilde{n}_{\lambda_{k2}})(\varepsilon_{\sigma}\cdot\tilde{b}_{-1})-\\
&-(k_2\cdot\tilde{b}_{-1})(\varepsilon_{\sigma}\cdot\tilde{n}_{\lambda_{k2}})\Big\}m_1g_{-\lambda_{k2}}\delta_{\lambda_{k1},\lambda_{k2}}-(\varepsilon_{\sigma}\cdot\tilde{b}_{-1})m_1m_2g_{\lambda_{k2}}\delta_{\lambda_{k1},-\lambda_{k2}}\Big].
\end{aligned} \tag{13}$$

Для продольной поляризации выражение (13) с учетом соотношений (2) получим

$$\begin{aligned}
T^{0}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2}}=&\frac{-\sqrt{4\pi\alpha}}{\sqrt{E_1E_2+k(E_2-E_1)\cos\theta-k^2\cos^2\theta}}\Big[\delta_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}\lambda_{k_2}(m_1g_{-\lambda k_2}-m_2g_{\lambda k_2})k\sin\theta-\\
&-\delta_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2}}(g_{-\lambda_{k_2}}(k(E_2-E_1)\cos\theta+E_1E_2-k^2\cos2\theta)+m_1m_2g_{\lambda_{k_2}})\Big]
\end{aligned}\,. \tag{14}$$

Подобным же образом для поперечных поляризаций:

$$T^{\sigma}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2}} = \frac{-\sqrt{2\pi\alpha}\ \sigma}{\sqrt{E_1E_2 + k(E_2 - E_1)\cos\theta - k^2\cos^2\theta}}$$

$$\Big[\delta_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2}} k\big\{(E_1 + E_2)\lambda_{k_2} + \sigma(E_1 - E_2 - 2k\cos\theta)\big\} g_{-\lambda_{k_2}} \sin\theta - \qquad . \qquad (15)$$

$$-2\delta_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2}} \delta_{\sigma,-\lambda_{k_2}} (m_1(E_2 + k\cos\theta) g_{-\lambda_{k_2}} + m_2(E_1 - k\cos\theta) g_{\lambda_{k_2}}))\Big]$$

3. Расчет наблюдаемых процесса $B(p,\sigma) \to l\left(k_1,\lambda_{k_1}\right) + \bar{l}\left(k_2,\lambda_{k_2}\right)$

Используя метод базисных спиноров, рассчитаем наблюдаемые величины для процесса $Z^0 \to l\,\bar{l}$. В этом случае константы связи даются выражениями:

$$g_- = \frac{-\frac{1}{2} + s_W^2}{s_W c_W},\ g_+ = \frac{s_W}{c_W}. \qquad (16)$$

С учетом соотношения (3) и того, что $m_1 = m_2 = m_l$ имеем

$$E_1 = E_2 = \frac{M_{z^0}}{2}. \qquad (17)$$

Используя (4), (14) и (15), усредняя по спиновым состояниям Z^0-бозона и суммируя по конечным спиновым состояниям фермионов получим общее выражение для ширины распада:

$$d\Gamma = G_F \frac{[g^2_{V,l} + g^2_{A,l}]M^2_{Z^0} + 2\left[g^2_{V,l} - 2g^2_{A,l}\right]m_l^2}{24\sqrt{2}\ \pi^2}\sqrt{-4m^2 + M^2}\sin\theta d\theta d\varphi\,, \qquad (18)$$

где векторная и аксиальная константы связи определены посредством

$$g_{V,l} = s_W c_W (g_- + g_+), \qquad g_{A,l} = s_W c_W (g_- - g_+), \qquad (19)$$

а G_F – константа Ферми, которая связанна с постоянной тонкой структуры α соотношением

$$\alpha = G_F \frac{2M^2_{w^\pm} s^2_W}{\sqrt{2}\pi} = G_F \frac{2M^2_{z^0} s^2_W c^2_W}{\sqrt{2}\pi}. \qquad (20)$$

Для распада Z^0-бозона в пару кварк–антикварк вычисления аналогичны:

$$d\Gamma = G_F \frac{[g^2_{V,q} + g^2_{A,q}]M^2_{Z^0} - \left[4g^2_{A,q} - 2g^2_{V,q}\right]m_q^2}{4\sqrt{2}\ \pi^2} |\vec{k}| \sin\theta d\theta d\varphi\,, \qquad (21)$$

где константы взаимодействия задаются соотношениями

$$g_{V,q} = s_W c_W (-\frac{3}{2} + 2\,s_W^2), \quad g_{A,q} = -\frac{1}{2} s_W c_W \qquad (22)$$

для кварков с зарядом $\left|\frac{1}{3}\right|$;

$$g_{V,q} = s_W c_W (-1/2 + 4/3\ s_W^2), \quad g_{A,q} = -1/2\, s_W c_W \tag{23}$$

для кварков с зарядом $\left|2/3\right|$ [2].

Для процесса $W^\pm \to l^\pm \nu_{l^\pm}$ константы связи даются выражениями:

$$g_+ = 0\,, \quad g_- = \frac{1}{\sqrt{2} s_W}\ . \tag{24}$$

С учётом того, что масса нейтрино равна нулю, усредняя по спиновым состояниям $W^\pm$-бозона и суммируя по конечным спиновым состояниям фермионов, получим общее выражение для ширины распада:

$$d\Gamma = G_F \frac{\left(2M_{W^\pm}^2 + m_l^2\right)\left(m^2 - M_{W^\pm}^2\right)^2}{48\sqrt{2} M_{W^\pm}^3 \pi^2} \sin\theta d\theta d\varphi\ . \tag{25}$$

В случае распада бозонов, когда все лептоны безмассовые, имеем

$$|\vec{k}| = \frac{M_{Z^0,W^\pm}}{2}, \quad m_1 = m_2 = 0 \tag{26}$$

и выражения (18) и (25) сводится к

$$d\Gamma = G_F \frac{[g_{V,l}^2 + g_{A,l}^2]}{24\sqrt{2}\,\pi^2} M_{Z^0}^3 \sin\theta d\theta d\varphi\,, \tag{27}$$

$$d\Gamma = G_F \frac{[g_{V,q}^2 + g_{A,q}^2]}{8\sqrt{2}\,\pi^2} M_{Z^0}^3 \sin\theta d\theta d\varphi \tag{28}$$

и

$$d\Gamma = G_F \frac{M_{W^\pm}^3}{24\sqrt{2}\,\pi^2} \sin\theta d\theta d\varphi \tag{29}$$

для Z^0 и $W^\pm$-бозонов соответственно. Интегрируя данные выражение по телесному углу, получим полную ширину распада Z^0 и $W^\pm$-бозонов соответственно:

$$\Gamma = G_F \frac{M_{Z^0}^3}{6\sqrt{2}\pi}\left[g_{V,l}^2 + g_{A,l}^2\right], \tag{29}$$

$$\Gamma = G_F \frac{M_{Z^0}^3}{3\sqrt{2}\pi}\left[g_{V,q}^2 + g_{A,q}^2\right], \tag{30}$$

$$\Gamma = G_F \frac{M_{W^\pm}^3}{6\sqrt{2}\pi}\ . \tag{31}$$

Полученные выражения (29), (30) совпадают с соответствующими ответами, приведенными в работе [2], что подтверждает правильность методики расчета матричных элементов с помощью МБС.

Литература

1. Hahn, T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3 / T. Hahn // Comput. Phys. Commun. 2001. – V. 140. – P. 418–431.

2. Borodulin, V.I. CORE: COmpendium of RElations: Version 2.1 / V.I. Borodulin, R.N. Rogalyov, S.R. Slabospitsky // CORE. [Electronic resource]. Mode of access: http://arxiv.org/pdf/hep–ph/9507456v1 – Date of access: 04.01.2011.

3. Андреев, В.В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66.– № 2. – С. 410–420.

4. Биленький, С.М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – Москва: Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.

Е.А. Дей

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА НУМЕРОВА И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Введение

Изучение связанных состояний в задачах квантовой механики во многих случаях требует численного решения одномерного уравнения Шредингера [1]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x) \qquad (1)$$

или радиального уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi}{dr^2}+V(r)\chi(r)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\chi(r)=E\chi(r), \qquad \chi(r)=rR(r). \qquad (2)$$

Оба варианта уравнения будем в дальнейшем описывать общей формой

$$\psi''=f(x)=g(x)\psi(x)-\varepsilon\psi(x) \qquad (3)$$

с граничными условиями

$$\psi(x\min)=0; \quad \psi(x\max)=0. \qquad (4)$$

Для численного решения задачи на собственные значения (3)–(4) область изменения аргумента $[x\min;\ x\max]$ разделим на N отрезков