Таблица 2 – Расчетная масса с учетом слоистой структуры

Планета	Масса (кг)	Расчетная масса (кг)		
		II–III–IV	II–IV–III	IV–III–II
Юпитер	$1{,}899 \cdot 10^{27}$	$1{,}919 \cdot 10^{27}$	$1{,}965 \cdot 10^{27}$	$1{,}988 \cdot 10^{27}$
Сатурн	$5{,}685 \cdot 10^{26}$	$5{,}767 \cdot 10^{26}$	$5{,}708 \cdot 10^{26}$	$5{,}671 \cdot 10^{26}$
Уран	$8{,}683 \cdot 10^{25}$	$8{,}331 \cdot 10^{25}$	$8{,}606 \cdot 10^{25}$	$8{,}633 \cdot 10^{25}$
Нептун	$1{,}024 \cdot 10^{26}$	$1{,}029 \cdot 10^{26}$	$1{,}099 \cdot 10^{26}$	$1{,}102 \cdot 10^{26}$

Теперь лучшие результаты более точны и отклоняются от действительных масс следующим образом:

– на 1,07 % выше у Юпитера (II–III–IV);
– на 0,25 % ниже у Сатурна (IV–III–II);
– на 0,58 % ниже у Урана (IV–III–II);
– на 0,44 % выше у Нептуна (II–III–IV).

Эти результаты можно рассматривать как вполне удовлетворительные, а соответствующие функции плотности считать близкими к реальным. Дальнейшая корректировка результатов, приведенных в таблице 2, в сторону улучшения возможна в случае учета слоистости атмосфер и сфероидальности формы с существенными коэффициентами сжатия, например, у Юпитера это параметр составляет порядка 6,5 %.

Список использованных источников

1 Уильям, Б. Внутреннее строение планет / Б. Уильям. – М. : Мир, 1987. – 328 с.

2 Anderson, D. L. Theory of the Earth / D. L. Anderson, E. C. Robertson. – Boston : Blackwell Publications, 1989. – 366 p.

3 Carroll, B. W. An Introduction to Modern Astrophysics / B. W. Carroll, D. A. Ostlie. – Pearson International Edition, 2007. – 1309 p.

4 California Institute of Technology (USA) [Electronic resourse] / NASA's Jet Propulsion Laboratory. – Pasadena, CA, 2004. – Mode of access : www.jpl.nasa.gov/solar system/. – Date of access : 10.08.2014.

5 Тюменков, Г. Ю. Моделирование радиальной функции плотности гравитирующего шара / Г. Ю. Тюменков, Е. П. Ельников, Е. В. Фирагина // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4. – С. 36–39.

6 Кузнецов, Д. С. Специальные функции / Д. С. Кузнецов. – М. : Высшая школа, 1962. – 249 с.

П. А. Хило, П. С. Шаповалов
г. Гомель, ГГТУ им. П. О. Сухого

РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГАУССОВЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКА В СРЕДАХ С КЕРРОВСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Распространение и взаимодействия пучков в нелинейной оптики представляет интерес, так как в бистабильных элементах и других приборах обработки и передачи информации часто наблюдается распространение нескольких мощных лазерных пучков в нелинейной среде. В настоящее время, учет взаимодействия решается или в приближении совпадении параметров пучков и задача сводится к самовоздействию одного пучка, или с помощью численного счета. В данной работе эта задача решается вариационным методом в классе гауссовых функций.

Предположим, что в нелинейной среде распространяются два круговых пучка нулевого и первого порядка. В качестве исходного уравнения описывающие лазерные пучки используется нелинейное параболическое уравнение записанное в цилиндрической системе координат (r, φ, z)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial^2 \varphi} - 2ik\frac{\partial U}{\partial z} + \beta |U|^2 U = 0 \quad , \qquad (1)$$

где U – комплексная амплитуда электромагнитного поля, β – коэффициент нелинейности среды. Предположим, что $U = U_0 + U_1$, где U_0 , U_1 – комплексные амплитуды взаимодествующих пучков. Подставляя это в уравнение (1), имеем

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial r}+\frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varphi^2}-2ik\frac{\partial U_0}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2}-2ik\frac{\partial U_1}{\partial z}+ \\ +\beta|U_0|^2U_0+2\beta|U_1|^2U_0+\beta|U_1|^2U_1+2\beta|U_0|^2U_1+\beta U_0^2U_1^*+\beta U_1^2U_0^*=0\end{gathered}\quad (2)$$

Двумя последними интерференционными членами в (2) пренебрегаем и уравнение записываем в виде системы двух нелинейных параболических уравнений

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial r}+\frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varphi^2}-2ik\frac{\partial U_0}{\partial z}+\beta|U_0|^2U_0+2\beta|U_1|^2U_0=0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2}-2ik\frac{\partial U_1}{\partial z}+\beta|U_1|^2U_1+2\beta|U_0|^2U_1=0 \quad .\end{gathered}\quad (3)$$

Решение системы уравнений (3) ищем в классе круговых Лагерра-Гаусса функций

$$U_0=\sqrt{I_0}\exp\left\{-P_0-iQ_0-\frac{r^2}{w_0^2}-\frac{ikr^2}{2R_0}\right\} \quad , \quad (4а)$$

$$U_1=\sqrt{I_1}e^{i\varphi}\frac{r}{w_1}\exp\left\{-P_1-iQ_1-\frac{r^2}{w_1^2}-\frac{ikr^2}{2R_1}\right\} \quad , \quad (4б)$$

где I – интенсивность излучения на оси пучка, w – радиус светового пятна, R – радиус кривизны фазовой поверхности. Световое пятно пучка первого порядка (4а) имеет кольцевую форму, т. е. интенсивность света на оси пучка равна нулю.

Для системы уравнений (3) запишем интеграл действия

$$\begin{gathered}J=\int_0^z dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}dr\left[r\frac{\partial U_0}{\partial r}\frac{\partial U_0^*}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial \varphi}\frac{\partial U_0^*}{\partial \varphi}-ikr\left(U_0\frac{\partial U_0^*}{\partial z}-U_0^*\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)+\right. \\ \left.+\frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial \varphi}\frac{\partial U_0^*}{\partial \varphi}-ikr\left(U_1\frac{\partial U_1^*}{\partial r}-U_1^*\frac{\partial U_1}{\partial r}\right)-\frac{\beta r}{2}\left(|U_0|^4+4|U_0|^2|U_1|^2+|U_1|^4\right)\right].\end{gathered}\quad (4)$$

Подставляем (3) в (4) и берем интеграл по координатам r и φ. Из условия экстремума функционала, т. е. из равенства нулю вариации $\delta J=0$, получим систему восьми обыкновенных дифференциальных уравнений для параметров двух пучков. Из этой системы нетрудно выделить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для радиусов световых пятен пучков.

$$\begin{gathered}k^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}=\frac{4(1-\chi_0)}{w_0^3}-\frac{128\chi_1 w_0\left(w_0^2-w_1^2\right)}{\left(w_0^2+w_1^2\right)^2} \quad , \\ k^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}=\frac{4(1-\chi_1)}{w_1^3}-\frac{32\chi_0 w_0^2 w_1}{\left(w_0^2+w_1^2\right)^2} \quad ,\end{gathered}\quad (5)$$

где $\chi_0=I_0\beta w_{00}^2/8=\beta P_0/4\pi$, $\chi_1=I_1\beta w_{10}^2/64=\beta P_1/16\pi$ – эффективная мощность пучков в нелинейной среде, P_0, P_1 – мощность пучков нулевого и первого порядка, w_{00}, w_{10} – значение радиуса световых пятен пучков на границе нелинейной среды z=0. Сравнивая выражения для χ_0 и χ_1, заключаем что критическая мощность самофокусировки для кольцевого пучка (Лагерра-Гауссова

Умножая первое уравнение системы (5) на χ_1 а второе уравнение на χ_2 дифференцируя их по z и складывая получим соотношение

$$\frac{d^3\left(\chi_1 w_1^2+\chi_2 w_2^2\right)}{dz^3}=0 \quad . \quad (6)$$

Решение уравнение (6) имеет вид:

$$\chi_1 w_1^2 + \chi_2 w_2^2 = C_2 z^2 + C_1 z + C_0 \quad , \tag{7}$$

где постоянные интегрирования C_0, C_1, C_2 равны

$$C_0 = \chi_1 w_{10}^2 + \chi_2 w_{20}^2 \quad ,$$

$$C_1 = 2\chi_1 \frac{w_{10}^2}{R_{10}} + 2\chi_2 \frac{w_{20}^2}{R_{20}} \quad ,$$

$$C_2 = \chi_1 \frac{w_{10}^2}{R_{10}^2} + \chi_2 \frac{w_{20}^2}{R_{20}^2} + \frac{4\chi_1(1-\chi_1)}{k^2 w_{10}^2} + \frac{4\chi_2(1-\chi_2)}{k^2 w_{20}^2} - \frac{32\chi_1\chi_2}{k^2\left(w_{10}^2 + w_{20}^2\right)} \ .$$

Здесь R_{10}, R_{20} – радиусы кривизны фазовой поверхности пучков при z=0. Для упрощение решения системы (5) сделаем замену функции

$$w_1 = \sqrt{C_2 z^2 + C_1 z + C_0}\, V(\tau) \quad , \tag{8}$$

где τ новая переменная $\tau = \int\limits_0^z \frac{dz}{C_2 z^2 + C_1 z + C_0}$.

Подставляя (8) в первое уравнение системы (5) получим следующее выражение

$$k^2 \frac{d^2 V}{d\tau^2} = k^2 \gamma V + \frac{4(1-\chi_1)}{V^3} - \frac{32\chi_2^3 V}{\left[1 + (\chi_2 - \chi_1)V^2\right]^2} \quad , \tag{9}$$

где $\gamma=-C_2C_0$.

Для дальнейшего упрощения предположим, что эффективные мощности пучков равны, т.е. $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, а начальные фазовые поверхностей пучков плоские ($1/R_{10} = 1/R_{20} = 0$). Тогда уравнение (8) запишется в следующем виде:

$$k^2 \frac{d^2 V}{d\tau^2} = k^2 \gamma V + \frac{4(1-\chi)}{V^3} - 32\chi^3 V \quad . \qquad 10)$$

Интегрируя уравнение (10) получим, при $\chi < 1$, решение

$$2\chi V^2 = 1 + \sqrt{1 + \frac{16\chi^2(1-\chi)}{\delta}} \sin\left[-\frac{2\sqrt{-\delta}}{k}\tau + T_0\right] \quad , \tag{11}$$

где постоянная интегрирования $T_0 = \arcsin\left(2\chi V_0^2 - 1\Big/\sqrt{1 + \frac{16\chi^2(1-\chi)}{\delta}}\right)$, а $V_0^2 = \frac{w_{10}^2}{\chi_1 w_{10}^2 + \chi_2 w_{20}^2}$,

$\delta = k^2\gamma - 32\chi^2$.

В случаи $\chi > 1$ решение уравнение (9) имеет вид

$$\delta V^2\left(V^2 + \frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\chi}\right) = \exp\left(\frac{2\sqrt{\delta}}{k}\tau + T_0\right) + 4(1-\chi) + \frac{\sqrt{\delta}}{2\chi} \quad . \tag{12}$$

Здесь $T_0 = \ln\left|\sqrt{\delta} V_0^4 + \left(\sqrt{\delta} - \frac{\delta}{\chi}\right)V_0^2 - 4(1-\chi) - \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{\chi}}\right|$.

Численный счет системы уравнений (5) показывает, что поведение взаимодействующих пучков в нелинейной среде достаточно сложно. Размер взаимодействующих пучков может или одновременно возрастают, или уменьшается, а возможно что один из них будет возрастать а второй уменьшаться. Как следует из формулы (6а), в случаи распространения двух гауссовых пучков в нелинейной среде величина $2W^2 = \chi_1 w_1^2 + \chi_2 w_2^2$ изменяется по параболическому закону аналогичному закону изменения радиуса светового пятна кругового пучка. По типу изменение величины W можно выделить три режима распространения взаимодействующих пучков.

В случае совпадение мощности взаимодействующих пучков ($\chi_1 = \chi_2 = \chi$) и плоским начальным фазовым фронте в работе было получено аналитическое выражение для функции описывающей поперечный размер пучков $\left(V^2 = w_1^2 / \left(\chi_1 w_1^2 + \chi_2 w_2^2\right)\right)$ (см. формулы (11), (12). При мощности пучков меньше критической мощности для случая распространения одного пучка, взаимодействующие пучки будут осциллировать. Функция V^2 по переменной τ изменятся по закону синуса. Период ее колебания равен $T = k\pi / \sqrt{-\delta}$. При мощности пучков больше критической функция V^2 уменьшается по экспоненте до нуля.

Критическая мощность нелинейного сжатия взаимодействующих пучков равна $\chi_{кр} = \left(w_{10}^2 + w_{20}^2\right)^2 / \left(\left(w_{10}^2 + w_{20}^2\right)^2 + 8 w_{10}^2 w_{20}^2\right)$. Она изменяется от значения $\chi_{кр} = 1/3$ при $w_{10}=w_{20}$ до единицы при значительном отличии поперечных размеров пучков (например $w_{10} >> w_{20}$).

Из всего выше приведенного следует, что при большом отличии мощностей или поперечных размеров пучков влияние их друг на друга при распространении в нелинейной среде незначительно. При близком значении мощности пучков и их поперечных размеров нелинейное взаимодействие пучков существенно влияет на их геометрию и его необходимо учитывать при расчетах оптических устройств.

А. С. Чаус
г. Трнава, Словацкий технический университет

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПОВЕРХНОСТНОЙ АКТИВНОСТИ МОДИФИЦИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

При производстве отливок из подавляющего большинства литейных сплавов обработка расплава модифицирующими добавками является практически стандартным технологическим приемом повышения качества и технико-экономических показателей литых изделий [1]. Введение модифицирующих добавок в расплав позволяет целенаправленно управлять формированием первичной микроструктуры литейных сплавов на стадии получения отливок с целью обеспечения заданного комплекса механических и эксплуатационных свойств в готовом изделии. Поэтому к настоящему времени накоплен большой теоретический и экспериментальный опыт по модифицированию литейных сплавов. Но, по сравнению со стандартными литейными сплавами, с целью улучшения структуры и свойств литых быстрорежущих сталей используется ограниченное число модификаторов. Такая ситуация обусловлена недостаточной изученностью многих элементов, которые априори считаются вредными только на основании того, что они ухудшают технологическую пластичность деформированных быстрорежущих сталей, подвергаемых горячей пластической деформации на стадии металлургического передела. С учетом вышеизложенного в данной работе* представлены результаты теоретической оценки поверхностной активности элементов с целью расширения номенклатуры эффективных модификаторов для литых вольфрамомолибденовых быстрорежущих сталей.

Теоретические расчеты поверхностной активности элементов. Известно, что модифицирующий эффект элементов зависит от их поверхностной активности [2; 3]. Чем меньше поверхностная энергия на границе кристалл–расплав, тем стабильнее система, т. е. более благоприятные условия для зарождения центров кристаллизации в расплаве. Изменить величину поверхностной энергии можно за счет придания в расплав поверхностно-активных элементов. С одной стороны, такие элементы, адсорбируясь на поверхности раздела твердая фаза (кристаллический зародыш) – жидкость, уменьшают там поверхностное натяжение, что увеличивает скорость зарождения и стабильность центров кристаллизации (зародышей) с меньшим критическим размером. С другой стороны, поверхностно-активные элементы, за счет образования адсорбционных мономолекулярных пленок на растущих кристаллах затрудняют диффузию атомов кристаллизующегося вещества и, как следствие, способствуют снижению скорости роста кристаллов, что в конечном итоге приводит к измельчению структуры сплава [2].

С точки зрения поверхностной активности модификаторы должны обладать низкой свободной энергией на границе твердая фаза – газ (пар). Это означает, что они должны иметь

* Работа выполнена благодаря финансовой поддержке по проекту VEGA № 1/0520/15.