Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Е. З. Авакян, С. Л. Авакян

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ для студентов технических специальностей дневной формы обучения

Гомель 2022

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.12я73
А18

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 7 от 01.05.2021 г.*)

Рецензент: доц. каф. «Промышленная теплоэнергетика и экология» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *А. В. Шаповалов*

Авакян, Е. З.

А18 Интегральное исчисление функции одной переменной : учеб.-метод. пособие для студентов техн. специальностей днев. формы обучения / Е. З. Авакян, С. Л. Авакян. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2022. – 114 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Учебно-методическое пособие содержит краткий теоретический материал, подробно разобранные типовые задачи и задачи для самостоятельного решения. Предназначено для использования при проведении практических занятий, а также для самостоятельной подготовки студентов по теме «Интегральное исчисление».

Для студентов технических специальностей дневной формы обучения.

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.12я73

СОДЕРЖАНИЕ

I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

II. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

I. Неопределенный интеграл

§ 1.1. Непосредственное интегрирование.

<u>Определение:</u> Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если

a) $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$

b) $F'(x) = f(x), \forall x \in (a;b)$.

Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на $(a;b)$, то и любая функция $F_1(x) = F(x) + C$, также является первообразной для $f(x)$ на $(a;b)$.

<u>Определение:</u> Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на $(a;b)$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$ на этом интервале.

Неопределенный интеграл обозначается символом $\int f(x)dx$. Приведенное выше определение неопределенного интеграла обычно записывают в виде формулы:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (1.1)$$

где $F(x)$ - любая из первообразных для функции $f(x)$ на $(a;b)$;

C - произвольная постоянная.

Операция нахождения всех первообразных функций $f(x)$ называется интегрированием этой функции.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$
3. $d\int f(x)dx = f(x)dx$
4. $\int df(x) = f(x) + C, \quad \int dx = x + C$
5. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$
6. $\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
7. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Согласно свойству 1, операция интегрирования является обратной к операции дифференцирования.

Для вычисления неопределенных интегралов будем использовать таблицу.

Таблица основных неопределенных интегралов:

I $$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$$

II $$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

III $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

IV $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

V $$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

VI $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

VII $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

VIII $$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$$

IX $$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$$

X $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

XI $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

XII $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

XIII $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

XIV $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

XV $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$$

Метод непосредственного интегрирования

Метод непосредственного интегрирования состоит в сведении заданного интеграла к сумме или разности табличных интегралов путем тождественных преобразований подынтегральной функции.

Пример1.1. Найти интеграл $\int \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3} dx$.

Решение: возведём числитель подынтегральной функции в квадрат:

$$\left(2 - \sqrt[3]{x}\right)^2 = 4 - 4\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$

Разделим полученное выражение на x^3:

$$\frac{\left(2 - \sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3} = \frac{4 - 4\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3} = 4x^{-3} - 4x^{-\frac{8}{3}} + x^{-\frac{7}{3}}$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{\left(2 - \sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3} dx = \int \left(4x^{-3} - 4x^{-\frac{8}{3}} + x^{-\frac{7}{3}}\right) dx$$

Воспользуемся свойствами 5 и 6 неопределенного интеграла:

$$\int \left(4x^{-3} - 4x^{-\frac{8}{3}} + x^{-\frac{7}{3}}\right) dx = 4\int x^{-3}dx - 4\int x^{-\frac{8}{3}}dx + \int x^{-\frac{7}{3}}dx$$

Полученные интегралы являются табличными (интеграл I), поэтому, получаем:

$$4\int x^{-3}dx - 4\int x^{-\frac{8}{3}}dx + \int x^{-\frac{7}{3}}dx = 4\frac{x^{-3+1}}{-3+1} - 4\frac{x^{-\frac{8}{3}+1}}{-\frac{8}{3}+1} + \frac{x^{-\frac{7}{3}+1}}{-\frac{7}{3}+1} + C =$$

$$= \frac{-2}{x^2} + \frac{12}{5x^{\frac{5}{3}}} - \frac{3}{4x^{\frac{4}{3}}} + C = -\frac{2}{x^2} + \frac{12}{5x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{4x\sqrt[3]{x}} + C$$

Таким образом:

$$\int \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx = -\frac{2}{x^2}+\frac{12}{5x\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4x\sqrt[3]{x}}+C$$

Правильность наших вычислений может быть проверена путем дифференцирования результата:

$$\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{12}{5x\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4x\sqrt[3]{x}}+C\right)' = -2\left(\frac{1}{x^2}\right)'+\frac{12}{5}\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\right)'-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\right)' =$$

$$= -2\cdot(-2)x^{-3}+\frac{12}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}-1}-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{x^3}-4x^{-\frac{8}{3}}+x^{-\frac{7}{3}} =$$

$$= \frac{4-4x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{x^3} = \frac{\left(2-x^{\frac{1}{3}}\right)^2}{x^3} = \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}$$

В результате дифференцирования получили подынтегральное выражение. Следовательно, заданный интеграл вычислен, верно.

Ответ:

$$\int \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx = -\frac{2}{x^2}+\frac{12}{5x\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4x\sqrt[3]{x}}+C$$

Пример 1.2. Найти интеграл

$$\int \frac{6x^2+5}{2x^2+9}dx$$

Решение: преобразуем подынтегральную функцию, выделив в числителе знаменатель:

$$\frac{6x^2+5}{2x^2+9} = \frac{3(2x^2+9)-27+5}{2x^2+9} = \frac{3(2x^2+9)-22}{2x^2+9} = 3-\frac{22}{2x^2+9}$$

$$= 3-\frac{11}{x^2+\frac{9}{2}}$$

Таким образом

$$\int \frac{6x^2+5}{2x^2+9}dx = \int \left(3 - \frac{11}{x^2+\frac{9}{2}}\right)dx$$

.

Воспользовавшись свойствами 5 и 6 неопределенного интеграла, получаем:

$$\int \left(3 - \frac{11}{x^2+\frac{9}{2}}\right)dx = 3\int dx - 11\int \frac{dx}{x^2+\frac{9}{2}}$$

.

Первый из интегралов вычислим, используя свойство 4, второй -табличный интеграл типа XII $\left(a^2 = \frac{9}{2}, a = \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Таким образом

$$3\int dx - 11\int \frac{dx}{x^2+\frac{9}{2}} = 3x - 11\cdot\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + C =$$

$$= 3x - \frac{11\sqrt{2}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{3} + C$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{6x^2+5}{2x^2+9}dx = 3x - \frac{11\sqrt{2}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{3} + C$$

Проверка:

$$\left(3x - \frac{11\sqrt{2}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{3} + C\right)' = (3x)' - \left(\frac{11\sqrt{2}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{3}\right)' =$$

$$= 3 - \frac{11\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{3}\right)^2}\left(\frac{x\sqrt{2}}{3}\right)' = 3 - \frac{11\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x^2}{9}}\frac{\sqrt{2}}{3} =$$

$$= 3 - \frac{22}{9}\cdot\frac{9}{9+2x^2} = \frac{3(9+2x^2)-22}{9+2x^2} = \frac{6x^2+5}{9+2x^2}$$

В результате дифференцирования получена подынтегральная функция. Следовательно, интеграл вычислен, верно.

Ответ:

$$\int \frac{6x^2+5}{2x^2+9}dx = 3x - \frac{11\sqrt{2}}{3} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{3} + C$$

Пример 1.3. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение: преобразуем подынтегральную функцию, используя определение тангенса и основное тригонометрическое тождество:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

Подставим результаты преобразования в интеграл:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

Нами были использованы табличный интеграл VI и свойство 4.

Проверка:

$$(\operatorname{tg} x - x + C)' = (\operatorname{tg} x)' - x' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

Ответ:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

Задания.

Задание 1.1. Найти интегралы и сделать проверку.

1. $\int x\sqrt{x}dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$
3. $\int \frac{4-5x\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x^3}}dx$
4. $\int \frac{5x^2-2x+6}{\sqrt{x^5}}dx$
5. $\int (2+5^x)^2 dx$
6. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

7. $\int e^x \cdot 3^{2x} dx$ 8. $\int \frac{x}{1+x} dx$ 9. $\int \frac{2x+3}{3x+1} dx$

10. $\int \frac{x^2+4}{3x^2-3} dx$ 11. $\int \frac{x^2}{x^2+4} dx$ 12. $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

13. $\int \frac{dx}{7+2x^2}$ 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ 15. $\int (tgx + ctgx)^2 dx$

<u>Ответы:</u> **1.** $2x^2\sqrt{x}/5 + C$; **2.** $4\sqrt[4]{x^3}/3 + C$; **3.** $-8/\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x^5} - 3ln|x| +$ $+ 2x\sqrt{x}/3 + C$; **4.** $10\sqrt{x} - 2/\sqrt[5]{x^3} + 6/\sqrt{x^5} + C$; **5.** $4x + 4 \cdot 5^x/ln5 +$ $+ 5^x/(2ln5) + C$; **6.** $x^2/2 - 2x + ln|x| + C$; **7.** $e^x \cdot 3^{2x}/(1 + 2ln3) + C$; **8.** $x -$ $ln|x+1| + C$; **9.** $2x/3 + 7ln|3x+1|/9 + C$; **10.** $\frac{x}{3} + \frac{5}{6} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$; **11.** $x -$ $-2arctg(x/2) + C$; **12.** $2arcsin\, x - x + C$; **13.** $\frac{1}{\sqrt{14}} arctg \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{7}} + C$;
14. $\frac{1}{3} arcsin \frac{3x}{2} + C$; **15.** $tgx - ctgx + C$.

§ 1.2. Метод занесения под знак дифференциала.

Метод занесения под знак дифференциала основан на определении дифференциала функции одной переменной:

$$dy = f'(x)dx \tag{1.2}$$

и свойстве инвариантности дифференциала первого порядка: если $y = f(x)$, а $x = g(z)$ то

$$dy = f'(x)dx = f'\big(g(z)\big)g'(z)dz \tag{1.3}$$

В силу этого свойства, таблица интегралов оказывается справедливой, независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией.

Существуют стандартные ситуации, в которых рекомендуется использовать метод занесения под знак дифференциала. Некоторые из них приведены ниже:

$$\int f(x^n)x^{n-1}dx = \int f(x^n)\frac{1}{n}\,dx^n \tag{1.4}$$

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(\sin x)d(\sin x) \tag{1.5}$$

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(\cos x)d(\cos x) \tag{1.6}$$

$$\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \int f(\ln x)d(\ln x) \tag{1.7}$$

$$\int f(\arcsin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(\arcsin x)d(\arcsin x) \tag{1.8}$$

$$\int f(\operatorname{arctg} x)\frac{dx}{1+x^2} = \int f(\operatorname{arctg} x)d(\operatorname{arctg} x) \tag{1.9}$$

$$\int f(a^x)a^x dx = \int f(a^x)\frac{da^x}{\ln a} \tag{1.10}$$

$$\int f(\operatorname{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int f(\operatorname{tg} x)d(\operatorname{tg} x) \tag{1.11}$$

$$\int f(\operatorname{ctg} x)\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int f(\operatorname{ctg} x)d(\operatorname{ctg} x) \tag{1.12}$$

Следует заметить, что

$$dx = d(x+a)$$

Пример 1.4. Найти $\int x^2\cos(x^3+6)\,dx$

Решение: применим метод занесения под знак дифференциала, воспользовавшись формулой (1.4):

$$\int x^2\cos(x^3+6)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos(x^3+6)\,d(x^3) = \{y = x^3+6; dy = d(x^3)\} =$$

$$\frac{1}{3}\int \cos y\,dy = \{\text{табличный интеграл VI}\} = \frac{1}{3}\sin y + C = \frac{1}{3}\sin(x^3+6) + C$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3}\sin(x^3+6) + C\right)' = \frac{1}{3}(\sin(x^3+6))' = \frac{1}{3}\cos(x^3+6)\,(x^3+6)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cos(x^3+6)\,3x^2 = x^2\cos(x^3+6)$$

Ответ:

$$\int x^2 \cos(x^3+6)\,dx = \frac{1}{3}\sin(x^3+6)+C$$

Пример 1.5. Найти $\int te^{2-3t^2}dt$.

Решение: Воспользовавшись формулой (1.4), получаем:

$$\int te^{2-3t^2}dt = \frac{1}{2}\int e^{2-3t^2}d(t^2) =$$

$$= \left\{y = 2-3t^2; dy = -3d(t^2); d(t^2) = -\frac{1}{3}dy\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int e^y\left(-\frac{1}{3}\right)dy = -\frac{1}{6}\int e^y dy =$$

$$= \{\text{табличный интеграл типа III}, \ln e = 1\} =$$

$$-\frac{1}{6}e^y + \mathrm{C} = -\frac{1}{6}e^{e^{2-3t^2}} + \mathrm{C}$$

Ответ:

$$\int te^{2-3t^2}dt = -\frac{1}{6}e^{e^{2-3t^2}} + \mathrm{C}$$

Пример 1.6. Найти

$$\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Решение:

$$\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \{\text{по формуле } (1.4)\} = \int\frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \{y = 1-x^2, dy = -d(x^2)\} =$$

$$= -\int\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int y^{-\frac{1}{2}}dy = \{\text{табличный интеграл } I\} = -\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \mathrm{C}_1 =$$

$$= -2y^{\frac{1}{2}} + C_1 = -2\sqrt{1-x^2} + C_1$$

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \{\text{по формуле (1.8)}\} = \int \sqrt{\arcsin x}\, d(\arcsin x) =$$

$$= \{y = \arcsin x\,, dy = d(\arcsin x)\} = \int \sqrt{y}dy = \int y^{\frac{1}{2}}dy =$$

$$= \{\text{табличный интеграл 1}\} = \frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \mathrm{C}_2 = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}_2 =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt[3]{(\arcsin x)^2} + \mathrm{C}_2 = \frac{2}{3}\arcsin x\sqrt{\arcsin x} + \mathrm{C}_2$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\arcsin x\sqrt{\arcsin x} + \mathrm{C}$$

$$(\mathrm{C} = C_1 - \mathrm{C}_2)$$

Ответ:

$$\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\arcsin x\sqrt{\arcsin x} + \mathrm{C}$$

Задания.

Задание 1.2. Найти интегралы.

1. $\int x \cdot \sqrt[3]{2+x^2}dx$ 2. $\int \frac{x^2dx}{2x^3+3}$ 3. $\int \frac{cosx}{(5+sinx)^3}dx$

4. $\int \frac{sin2x}{1+sin^2x}dx$ 5. $\int \frac{x}{4+x^2}dx$ 6. $\int \frac{x}{4+x^4}dx$

7. $\int \frac{5^x}{\sqrt{5^x-1}}dx$ 8. $\int \frac{5^x}{\sqrt{25^x-1}}dx$ 9. $\int \frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

10. $\int \frac{x+\sqrt[3]{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 11. $\int \frac{\sqrt[5]{tg^2x}}{cos^2x}dx$ 12. $\int \frac{dx}{(x+2)\cdot ln(x+2)}$

13. $\int \frac{cosx - sinx}{cosx + sinx} dx$ 14. $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ 15. $\int \frac{dx}{x \cdot ch^2(lnx)}$

16. $\int \frac{2ctg^3\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot sin^2\sqrt{x}} dx$ 17. $\int \frac{2(sinx + cosx)}{\sqrt[3]{sinx - cosx}} dx$ 18. $\int \frac{x^2 ln^2(x^3+1)}{x^3+1} dx$

<u>Ответы:</u> 1. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2+x^2)^4} + C$; **2.** $\frac{1}{6} ln|2x^3 + 3| + C$; **3.** $-1/(2(5+sinx)^2) + C$; **4.** $ln(1 + sin^2x) + C$; **5.** $ln\sqrt{4+x^2} + C$; **6.** $\frac{1}{4} arctg(x^2/2) + C$; **7.** $2\sqrt{5^x - 1}/ln5 + C$; **8.** $ln\left(5^x + \sqrt{25^x - 1}\right)/ln5 + C$; **9.** $2sin\sqrt{x}$+C; **10.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{arcsin^4x} - \sqrt{1-x^2} + C$; **11.** $\frac{5}{7}\sqrt[5]{tg^7x} + C$; **12.** $ln\left(ln(x+2)\right) + C$; **13.** $ln|cosx + sinx| + C$; **14.** $arctg^2\sqrt{x} + C$; **15.** $th(lnx) + C$; **16.** $-ctg^4\sqrt{x} + C$; **17.** $3\sqrt[3]{(sinx - cosx)^2} + C$; **18.** $\frac{1}{9} ln^3(x^3+1) + C$.

§ 1.3. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.

Метод замены переменной заключается в том, что в интеграле $\int f(x)dx$, нахождение которого затруднительно, вводят новую переменную t, связанную с прежней переменной соотношением

$$x = \varphi(t) \tag{1.13}$$

или

$$t = \psi(x) \tag{1.14}$$

В случае замены (1.13)

$$dx = \varphi'(t)dt \tag{1.15}$$

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = \int f_1(t)dt \tag{1.16}$$

Если новая переменная вводится с помощью (1.14), то dx находим из

$$dt = \psi'(x)dx \tag{1.17}$$

Тогда

$$dx = \frac{1}{\psi'(x)} dt$$

Воспользовавшись формулой для производной обратной функции

$$(\psi^{-1}(t))' = \frac{1}{\psi'(x)} ,$$

получаем выражение, аналогичное (1.16)

$$\int f(x)dx = \int f(\psi^{-1}(t))(\psi^{-1}(t))'dt = \int f_1(t)dt \tag{1.18}$$

При этом соотношения (1.13), (1.14) подбирают таким образом, чтобы полученный интеграл $\int f_1(t)dt$ стал табличным или, по крайней мере, был бы ясен способ его нахождения. После вычисления $\int f_1(t)dt$ следует вернуться к исходной переменной, используя соотношения обратное к (1.13) или (1.14).

Необходимо помнить, что функции $\varphi(t)$ в (1.13) должна быть строго монотонной, имеющей непрерывную первую производную, функцией переменной *t* на некотором промежутке изменения аргумента *t*.

Заметим, что интегралы (1.4) -(1.12) могут быть вычислены с помощью замены (1.14).

$$\int f(x^n)x^{n-1}dx = \left\{t = x^n, dt = nx^{n-1}dx, x^{n-1}dx = \frac{1}{n}dt\right\} \tag{1.19}$$

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx = \{t = \sin x\,, \cos x\,dx = dt\} \tag{1.20}$$

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx = \{t = \cos x\,, dt = -\sin x\,dx, \sin x\,dx = -dt\} \tag{1.21}$$

$$\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \left\{t = \ln x\,, \frac{dx}{x} = dt\right\} \tag{1.22}$$

$$\int f(\arcsin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{t = \arcsin x\,, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt\right\} \tag{1.23}$$

$$\int f(\operatorname{arctg} x)\frac{dx}{1+x^2} = \left\{t = \operatorname{arctg} x\,, \frac{dx}{1+x^2} = dt\right\} \tag{1.24}$$

$$\int f(a^x)a^x dx = \left\{t = a^x, dt = a^x \ln a\,dx, a^x dx = \frac{dt}{\ln a}\right\} \tag{1.25}$$

$$\int f(\operatorname{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \left\{t = \operatorname{tg} x\,, \frac{dx}{\cos^2 x} = dt\right\} \tag{1.26}$$

$$\int f(\operatorname{ctg} x)\frac{dx}{\sin^2 x} = \left\{t = \operatorname{ctg} x\,, dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \frac{dx}{\sin^2 x} = -dt\right\} \tag{1.27}$$

Пример 1.7 Найти

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}$$

Решение: перепишем интеграл в виде:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-(x^3)^2}}$$

и введем новую переменную $t = x^3$:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-(x^3)^2}} = \left\{t = x^3, dt = 3x^2dx, x^2dx = \frac{1}{3}dt\right\} = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{\sqrt{4-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \{\text{табличный интеграл типа XIV}\}$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\frac{t}{2} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x^3}{2} + C$$

Ответ:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x^3}{2} + C$$

Пример 1.8. Найти

$$\int \frac{dx}{e^x+1}$$

Решение: ведём новую переменную t: $x = \ln t$

Тогда

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \left\{x = -\ln t\,, dx = -\frac{dt}{t},\right\} = \int \frac{-\frac{dt}{t}}{e^{-\ln t}+1} = -\int \frac{dt}{t\left(\frac{1}{t}+1\right)}$$

$$= -\int \frac{dt}{1+t} = \{\text{табличный интеграл II}\} = -\ln|t+1| + C$$

$$= \{t = e^{-x}\} = -\ln|e^{-x}+1| + C = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C$$

$$= x - \ln(e^x+1) + C$$

Ответ:

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = x - \ln(e^x+1) + C$$

Введение новой переменной существенно упрощает вычисление интегралов вида

$$\int x^n(ax+b)^m dx,$$

где степень m больше степени n.

$$\int x^n(ax+b)^m dx = \left\{ax+b=t, x=\frac{t-b}{a}, dx=\frac{dt}{a}\right\}$$

Пример 1.9. Найти

$$\int x^2(3x+2)^{10}dx$$

Решение:

$$\int x^2(3x+2)^{10}dx = \left\{3x+2=t, x=\frac{t-2}{3}, dx=\frac{1}{3}dt\right\} =$$

$$= \int \left(\frac{t-2}{3}\right)^2 t^{10}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{27}\int (t-2)^2 t^{10}dt = \frac{1}{27}\int (t^2-4t+4)t^{10}dt =$$

$$= \frac{1}{27}\int (t^{12}-4t^{11}+4t^{10})dt = \{\text{по свойствам 5 и 6}\} =$$

$$= \frac{1}{27}\left(\int t^{12}dt - 4\int t^{11}dt + 4\int t^{10}dt\right) = \{\text{табличный интеграл типа I}\} =$$

$$= \frac{1}{27}\left(\frac{t^{13}}{13} - 4\frac{t^{12}}{12} + 4\frac{t^{11}}{11}\right) + C = \frac{t^{11}}{27}\left(\frac{t^2}{13} - \frac{t}{3} + \frac{4}{11}\right) + C =$$

$$= \frac{(3x+2)^{11}}{27}\left(\frac{(3x+2)^2}{13} - \frac{3x+2}{3} + \frac{4}{11}\right) + C$$

Ответ:

$$\int x^2(3x+2)^{10}dx = \frac{(3x+2)^{11}}{27}\left(\frac{(3x+2)^2}{13} - \frac{3x+2}{3} + \frac{4}{11}\right) + C.$$

Замена переменной позволяет вычислять интегралы, содержащие корни иррациональные выражения

Пример 1.10. Найти

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$$

Решение: для вычисления данного интеграла необходимо ввести новую переменную таким образом, чтобы избавиться от иррациональности в подынтегральной функции. Поэтому вводим новую переменную $t=\sqrt{x+1}$.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left\{t=\sqrt{x+1}, x=t^2-1, dx=2tdt\right\} = \int \frac{(t^2-1)2tdt}{t}$$

$$= 2\int (t^2-1)dt =$$

$$= \{\text{используем свойства 5,6 и табличный интеграл I}\} =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C = \frac{2t}{3}(t^2 - 1) + C =$$

$$= \left\{\text{возвращаемся к переменной } x: t = \sqrt{x+1}; t^2 = x + 1\right\} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x+1}}{3}(x + 1 - 1) + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x+1} + C$$

Ответ:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x+1} + C$$

Для упрощения интегралов вида

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 \pm a}}$$

следует сделать подстановку:

$$x = \frac{1}{t}$$

Пример 1.11. Найти

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

Решение:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \left\{x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{1}{t^2}dt, x^2 + 4 = \left(\frac{1}{t}\right)^2 + 4 = \frac{1+4t^2}{t^2}\right\} =$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+4t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+(2t)^2}} =$$

$$= \{\text{используем свойство 7 и табличный интеграл XV}\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|2t + \sqrt{1+(2t)^2}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x} + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{x^2+4}}{x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{x^2+4}}\right| + C$$

Ответ:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{x^2+4}}\right| + C$$

Задания.

Задание 1.3. Найти интегралы.

1. $\int x^3(x-3)^6dx$	2. $\int x^2(2x+5)^7dx$	3. $\int x^2(3-2x)^{10}dx$
4. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx$	5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$	6. $\int \sqrt[5]{2\sin x-1}\cos x\,dx$
7. $\int \frac{\sqrt[3]{tg\,3x}}{cos^2 3x}dx$	8. $\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+10}$	9. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$
10. $\int \frac{ln(tg\,x)}{\sin x\cdot\cos x}dx$	11. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$

<u>Ответы:</u> **1.** $(x-3)^7\left(\frac{1}{10}(x-3)^3+(x-3)^2+\frac{27}{8}(x-3)+\frac{27}{7}\right)+C$;
2. $(2x+5)^8\left(\frac{1}{80}(2x+5)^2-\frac{5}{36}(2x+5)+\frac{25}{64}\right)+C$; **3.** $-\frac{1}{8}(3-$
$-2x)^{11}\left(\frac{9}{11}-\frac{1}{2}(3-2x)+\frac{1}{13}(3-2x)^2\right)+C$; **4.** $2\sqrt{x}-4arctg\left(\sqrt{x}/2\right)+C$;
5. $ln|x|-ln\left|1+\sqrt{x^2+1}\right|+C$; **6.** $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(2\sin x-1)^6}+C$; **7.** $\frac{1}{4}\sqrt[3]{tg^4 3x}+C$;
8. $\frac{1}{6}arctg\left(\frac{x^2+1}{3}\right)+C$; **9.** $C-arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right)$; **10.** $\frac{1}{2}ln^2|tg\,x|+C$;
11. $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C$; **12.** $\frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{2x+1}+1\right)^2+3ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C$.

§ 1.4. Метод интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям основан на применении формулы

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu \qquad (1.28)$$

где $u(x)$ и $v(x)$- непрерывно дифференцируемые на некотором интервале функции.

Формула (1.28), называемая формулой интегрирования по частям, позволяет перейти от более сложного интеграла $\int udv$ к более простому $\int vdu$.

К интегралам, которые находят методом интегрирования по частям, относятся интегралы следующих видов:

1) $\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\sin\alpha x\,dx$, где $P_n(x)$ - полином n-ой степени от x.

В данном случае за $u(x)$ следует выбрать $P_n(x)$, а за dv - $\cos\alpha x\,dx$ или $\sin\alpha x\,dx$

Тогда

$$du = \left(P_n(x)\right)' dx = P_{n-1}(x)dx,\ du = \left(P_n(x)\right)' dx = P_{n-1}(x)dx$$

$P_{n-1}(x)$- полином степени на единицу меньшей, чем исходный.

Таким образом,

$$\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = P_n(x) & du = P_{n-1}(x)dx \\ dv = \cos\alpha x\,dx & v = \dfrac{1}{\alpha}\sin\alpha x \end{matrix}\right\} = \tag{1.29}$$

$$= \frac{1}{\alpha}P_n(x)\sin\alpha x - \int P_{n-1}(x)\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\,dx$$

$$\int P_n(x)\sin\alpha x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = P_n(x) & du = P_{n-1}(x)dx \\ dv = \sin\alpha x\,dx & v = -\dfrac{1}{\alpha}\cos\alpha x \end{matrix}\right\} = \tag{1.30}$$

$$= -\frac{1}{\alpha}P_n(x)\cos\alpha x + \int P_{n-1}(x)\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\,dx$$

Таким образом, в результате применения формулы (1.28) мы приходим к интегралу более простому по отношению к исходному.

Следует подчеркнуть, что формула интегрирования по частям может быть применена несколько раз, до тех пор, пока мы не придем к $P_0(x)$, т.е. к интегралу $\int\sin\alpha x\,dx$ или $\int\cos\alpha x\,dx$.

Пример 1.12. Найти

$$\int (x^2+3x-2)\cos 3x\,dx$$

Решение:

$$\int (x^2+3x-2)\cos 3x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2+3x-2 & du = (2x+3)dx \\ dv = \cos 3x\,dx & v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right\} =$$

$$= (x^2 + 3x - 2)\frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x\,(2x+3)dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = 2x+3 & du = 2dx \\ dv = -\frac{1}{3}\sin 3x\,dx & v = \frac{1}{9}\cos 3x \end{Bmatrix} =$$

$$= (x^2 + 3x - 2)\frac{1}{3}\sin 3x + (2x+3)\frac{1}{9}\cos 3x - \int \frac{1}{9}\cos 3x\, 2dx =$$

$$= (x^2 + 3x - 2)\frac{1}{3}\sin 3x + (2x+3)\frac{1}{9}\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C =$$

$$= \frac{1}{27}(9x^2 + 27x - 20)\sin 3x + \frac{1}{9}(2x+3)\cos 3x + C$$

Ответ:

$$\int (x^2 + 3x - 2)\cos 3x\,dx =$$

$$= \frac{1}{27}(9x^2 + 27x - 20)\sin 3x + \frac{1}{9}(2x+3)\cos 3x + C$$

2) $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$, где $P_n(x)$ - полином n-ой степени от x.
В данном случае за $u(x)$ следует выбрать $P_n(x)$, а за dv - $e^{\alpha x}dx$.

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx = \begin{Bmatrix} u = P_n(x) & du = P_{n-1}(x)dx \\ dv = e^{\alpha x}dx & v = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} \end{Bmatrix} = \\ = \frac{1}{\alpha}P_n(x)e^{\alpha x} - \int P_{n-1}(x)\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}dx \qquad (1.31)$$

Формула интегрирования по частям применяется до тех пор, пока не останется $\int e^{\alpha x}dx$.

Пример 1.13. Найти

$$\int (x^3+2x-1)e^{3x}dx$$

Решение:

$$\int (x^3+2x-1)e^{3x}dx = \begin{Bmatrix} u = x^3+2x-1 & du = (3x^2+2)dx \\ dv = e^{3x}dx & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{Bmatrix} =$$

$$= (x^3+2x-1)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}(3x^2+2)dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = 3x^2+2 & du = 6xdx \\ dv = -\frac{1}{3}e^{3x}dx & v = -\frac{1}{9}e^{3x} \end{Bmatrix} =$$

$$= (x^3+2x-1)\frac{1}{3}e^{3x} - (3x^2+2)\frac{1}{9}e^{3x} + \int \frac{1}{9}e^{3x}6xdx =$$

$$= (3x^3-3x^2+6x-5)\frac{1}{9}e^{3x} + \int \frac{2}{3}e^{3x}xdx = \begin{Bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{2}{3}e^{3x}dx & v = \frac{2}{9}e^{3x} \end{Bmatrix} =$$

$$= (3x^3-3x^2+6x-5)\frac{1}{9}e^{3x} + x\frac{2}{9}e^{3x} - \int \frac{2}{9}e^{3x}dx =$$

$$= (3x^3-3x^2+8x-5)\frac{1}{9}e^{3x} - \frac{2}{27}e^{3x} + C =$$

$$= \frac{1}{27}(9x^3-9x^2+24x-17)e^{3x} + C$$

Ответ:

$$\int (x^3+2x-1)e^{3x}dx = \frac{1}{27}(9x^3-9x^2+24x-17)e^{3x} + C$$

Заметим, что в случае, если степень полинома n велика, для вычисления интегралов типа 2) можно воспользоваться схемой, приведенной на рисунке 1.1:

Строим таблицу, в первый столбец которой заносим исходный полином и все его производные вплоть до n-ой. Во второй столбец- $e^{\alpha x}$ и результат $n-$ кратного интегрирования заданной экспоненты. В третьем столбце пишем попеременно знаки $+$ и $-$.Результатом вычисления заданного интеграла будет сумма слагаемых полученных умножением элементов, соединенных стрелками

$P_n(x)$	$e^{\alpha x}$	$+$
$P_n'(x)$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$-$
$P_n''(x)$	$\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x}$	$+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n^{(n)}(x)$	$\frac{1}{\alpha^n}e^{\alpha x}$	$(-1)^n$
0	$\frac{1}{\alpha^{n+1}}e^{\alpha x}$	$(-1)^{n+1}$

Рисунок 1.1

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx = P_n(x)\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} - P_n'(x)\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x} + \cdots (-1)^n P_n^{(n)}(x)\frac{1}{\alpha^{n+1}}e^{\alpha x} + C$$

Пример 1.14. Найти

$$\int (x+5)^4 e^{\frac{x}{3}}dx$$

Решение:
Строим таблицу

$(x+5)^4$	$e^{\frac{x}{3}}$	$+$
$4(x+5)^3$	$3e^{\frac{x}{3}}$	$-$
$12(x+5)^2$	$9e^{\frac{x}{3}}$	$+$
$24(x+5)$	$27e^{\frac{x}{3}}$	$-$
24	$81e^{\frac{x}{3}}$	$+$
0	$243e^{\frac{x}{3}}$	$-$

Выписываем ответ:

$$\int (x+5)^4 e^{\frac{x}{3}}dx =$$

$$= (x+5)^4 3e^{\frac{x}{3}} - 4(x+5)^3 9e^{\frac{x}{3}} + 12(x+5)^2 27e^{\frac{x}{3}} -$$
$$-24(x+5)81e^{\frac{x}{3}} + 24 \cdot 243e^{\frac{x}{3}} + C =$$
$$= 3e^{\frac{x}{3}}((x+5)^4 - 12(x+5)^3 + 108(x+5)^2 - 216(x+5) + 1944) + C$$

Ответ:

$$\int (x+5)^4 e^{\frac{x}{3}} dx =$$
$$= 3e^{\frac{x}{3}}((x+5)^4 - 12(x+5)^3 + 108(x+5)^2 - 216(x+5) + 1944) + C$$

Заметим, что по аналогичной схеме могут быть вычислены и интегралы типа 1).

3) Интегралы вида $\int P_n(x) \ln x \, dx$

В данном случае за $u(x)$ следует выбрать $\ln x$, за dv-$P_n(x)dx$. Тогда

$$du = \frac{1}{x} dx$$
$$v(x) = \int P_n(x) dx = P_{n+1}(x)$$

Таким образом, данный интеграл может быть вычислен как:

$$\int P_n(x) \ln x \, dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = P_n(x)dx & v = P_{n+1}(x) \end{Bmatrix} = \tag{1.32}$$
$$= \ln x \cdot P_{n+1}(x) - \int P_{n+1}(x) \frac{dx}{x} = \left\{ Q_n(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x} \right\} =$$
$$= \ln x \cdot P_{n+1}(x) - \int Q_n(x) dx$$

В результате применения формулы интегрирования по частям (1.28) мы приходим к интегралу от многочлена $Q_n(x)$.

4) Интегралы вида $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x \, dx$

В данном случае за $u(x)$ следует выбрать $\operatorname{arctg} x$, за dv-$P_n(x)dx$. Тогда

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx$$
$$v(x) = \int P_n(x)dx = P_{n+1}(x)$$
Таким образом, данный интеграл может быть вычислен как:
$$\int P_n(x)\operatorname{arctg} x\, dx = \begin{Bmatrix} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = P_n(x)dx & v = P_{n+1}(x) \end{Bmatrix} = \qquad (1.33)$$
$$= \operatorname{arctg} x \cdot P_{n+1}(x) - \int \frac{P_{n+1}(x)}{1+x^2}dx$$

В результате применения формулы интегрирования по частям (1.28) мы приходим к интегралу от рациональной функции.

5) Интегралы вида $\int P_n(x) \arcsin x\, dx$

В данном случае за $u(x)$ следует выбрать $\arcsin x$, за dv-$P_n(x)dx$. Тогда
$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$v(x) = \int P_n(x)dx = P_{n+1}(x)$$
Таким образом, данный интеграл может быть вычислен как:
$$\int P_n(x)\arcsin x\, dx = \begin{Bmatrix} u = \arcsin x & du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = P_n(x)dx & v = P_{n+1}(x) \end{Bmatrix} = \qquad (1.34)$$
$$= \arcsin x \cdot P_{n+1}(x) - \int \frac{P_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

В результате применения формулы интегрирования по частям (1.28) мы приходим к интегралу, который всегда может быть вычислен в элементарных функциях.

Пример 1.15. Найти
$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx.$$
Решение:

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \begin{Bmatrix} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = xdx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{Bmatrix} =$$

$$= \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

Для вычисления полученного интеграла, преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Таким образом,

$$\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

Итак, окончательно получаем

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$$

6) Интегралы вида $\int \sin \alpha x\, e^{bx}dx$, $\int \cos \alpha x\, e^{bx}dx$ вычисляются с помощью двукратного применения формулы интегрирования по частям и последующего решения полученного уравнения относительно исходного интеграла. Следует отметить, что в данном случае безразлично, что изначально принимать за $u(x)$, а что за $dv(x)$.

Пример 1.16. Найти

$$\int \sin 2x\, e^{3x}dx$$

Решение:

$$\int \sin 2x\, e^{3x}dx = \begin{Bmatrix} u = \sin 2x & du = 2\cos 2x\, dx \\ dv = e^{3x}dx & v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{Bmatrix} =$$

$$= \sin 2x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\, 2\cos 2x\, dx = \begin{Bmatrix} u = 2\cos 2x & du = -4\sin 2x\, dx \\ dv = \frac{1}{3}e^{3x}dx & v = \frac{1}{9}e^{3x} \end{Bmatrix} =$$

$$= \sin 2x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - 2\cos 2x \cdot \frac{1}{9}e^{3x} - \int \frac{1}{9}e^{3x} 4\sin 2x\, dx =$$

$$= \frac{3\sin 2x - 2\cos 2x}{9}e^{3x} - \frac{4}{9}\int e^{3x}\sin 2x\, dx =$$

В результате двукратного применения формулы интегрирования по частям (1.28) мы пришли к исходному интегралу. Обозначим его через I:

$$I = \int \sin 2x\, e^{3x} dx$$

Тогда полученное нами соотношение можно записать в виде

$$I = \frac{3\sin 2x - 2\cos 2x}{9}e^{3x} - \frac{4}{9}I$$

Из полученного уравнения найдем I:

$$I = \frac{3\sin 2x - 2\cos 2x}{13}e^{3x}$$

Ответ:

$$\int \sin 2x\, e^{3x} dx = \frac{3\sin 2x - 2\cos 2x}{13}e^{3x} + C$$

Задания.

Задание 1.4. Найти интегралы.

1. $\int x\, sin\, 2x\, dx$	2. $\int (3x^2 - x)\cos 5x\, dx$	3. $\int x^3 \sin x\, dx$
4. $\int x\, 2^x dx$	5. $\int (x^2 - 3x + 4)\, 3^x dx$	6. $\int x^5 e^{3x} dx$
7. $\int \ln 3x\, dx$	8. $\int x^3 \ln 5x\, dx$	9. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$

$10. \int \operatorname{arctg} x\,dx$ $\qquad$ $11. \int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$ $\qquad$ $12. \int (x^2+1)\operatorname{arctg} x\,dx$

$13. \int \arcsin x\,dx$ $\qquad$ $14. \int x^2 \arcsin x\,dx$ $\qquad$ $15. \int \sin\sqrt{x}\,dx$

$16. \int x^5 e^{x^2} dx$ $\qquad$ $17. \int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$ $\qquad$ $18. \int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

$19. \int \cos(ln x)\,dx$ $\qquad$ $20. \int e^{2x}\cos 2x\,dx$ $\qquad$ $21. \int 2^x \sin x\,dx$

<u>*Ответы:*</u> **1.** $-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$; **2.** $\frac{1}{5}\left(3x^2 - x - \frac{6}{25}\right)\sin 5x +$ $+\frac{1}{25}(6x-1)\cos 5x + C$; **3.** $(6x - x^3)\cos x + (3x^2-6)\sin x + C$;
4. $\frac{2^x}{ln2}\left(x - \frac{1}{ln2}\right) + C$; **5.** $\frac{3^x}{(ln3)^3}\left((x^2-3x+4)ln^2 3 - (2x-3)ln3 + 2\right) + C$;
6. $e^{3x}\left(\frac{x^5}{3} - \frac{5x^4}{3^2} + \frac{20x^3}{3^3} - \frac{60x^2}{3^4} + \frac{120x}{3^5} - \frac{120}{3^6}\right) + C$; **7.** $x(ln(3x)-1) + C$;
8. $\frac{x^4}{4}\left(ln(5x) - \frac{1}{4}\right) + C$; **9.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right) + C$; **10.** $x\,arctgx - \frac{1}{2}ln(x^2+1) +$ $+C$; **11.** $(x+1)arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$; **12.** $\left(\frac{x^3}{3} + x\right)arctgx - \frac{x^2}{6} - \frac{ln(x^2+1)}{3} + C$;
13. $x\,arcsinx + \sqrt{1-x^2} + C$; **14.** $\frac{1}{9}\left(3x^3 arcsinx + 3\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)^3}\right) +$ $+C$; **15.** $2\left(\sin\sqrt{x} - -\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right) + C$; **16.** $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^4 - 2x^2 + 2) + C$; **17.** $C -$ $\frac{1}{x}(ln^3 x + 3ln^2 x + +6lnx + 6)$; **18.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot arcsinx - ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$;
19. $\frac{x}{2}(\cos(lnx) + \sin(lnx)) + C$; **20.** $\frac{1}{4}e^{2x} \cdot (\sin 2x + \cos 2x) + C$;
21. $\frac{2^x}{1+(ln2)^2}(ln2\sin x - \cos x) + C$.

§ 1.5. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен.

Вычисление интегралов вида

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + px + q} \qquad (1.35)$$

состоит в сведении данного интеграла к одному из табличных интегралов вида I, II, XII и XIII.
Выделим полный квадрат в знаменателе подынтегрального выражения:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{1}{2}px+\left(\frac{1}{2}p\right)^2-\left(\frac{1}{2}p\right)^2+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$$

Заметим, что $D=p^2-4q$ является дискриминантом квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0$$

Возможны следующие случаи:

I. $D=p^2-4q>0$

Обозначим

$$\frac{p^2-4q}{4}=a^2$$

Перепишем интеграл (1.35) в виде

$$I=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-a^2} \qquad (1.36)$$

Сделаем замену переменной

$$x+\frac{p}{2}=t, dx=dt$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-a^2}=\int\frac{dt}{t^2-a^2}=\{\text{табличный интеграл типа XIII}\}=$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+\frac{p}{2}-a}{x+\frac{p}{2}+a}\right|+C$$

Таким образом

$$I=\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+\frac{p}{2}-a}{x+\frac{p}{2}+a}\right|+C,\left(a=\frac{\sqrt{D}}{2}\right) \qquad (1.37)$$

В случае $D=p^2-4q>0$ интеграл (1.35) может быть вычислен и другим способом.

В данном случае квадратный трехчлен имеет два действительных корня

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}$$

и $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$.

Интеграл (1.35) можно переписать в виде:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} \qquad (1.38)$$

Подынтегральную функцию в (1.38) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{(x - x_1)} + \frac{B}{(x - x_2)} = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

$$\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Числа A и B должны быть подобраны таким образом, чтобы полученное выражение было тождеством. Знаменатели дробей равны, следовательно должны быть и числители:

$$A(x - x_2) + B(x - x_1) = 1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства

$$\begin{aligned} x^1&: \quad A + B = 0 \\ x^0&: \quad -Ax_2 - Bx_1 = 1 \end{aligned}$$

Решая полученную систему, получаем

$$A = \frac{1}{x_1 - x_2};\, B = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

Таким образом, интеграл можно переписать в виде

$$\int \frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \int \left(\frac{\frac{1}{x_1 - x_2}}{(x - x_1)} + \frac{\frac{1}{x_2 - x_1}}{(x - x_2)} \right) dx = \{\text{по свойствам 5 и 6}\} =$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_2} \int \frac{dx}{(x - x_1)} + \frac{1}{x_2 - x_1} \int \frac{dx}{(x - x_2)} =$$

$$= \{\text{табличные интегралы типа II}\} = \frac{1}{x_1 - x_2} (\ln|x - x_1| - \ln|x - x_2|) + \mathrm{C} =$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_2} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| + \mathrm{C}$$

Таким образом,

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{x_1 - x_2} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| + \mathrm{C} \left(x_{1,2} == \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} \right) \quad (1.39)$$

Легко показать, что формулы (1.37) и (1.39) эквивалентны.

Пример 1.17. Найти

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}.$$

Решение:

I способ

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \left\{ x + \frac{5}{2} = t, dx = dt \right\} = \int \frac{dx}{t^2 - \frac{1}{4}} =$$

$$= \{\text{табличный интеграл типа XIII}\} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{2}}{t + \frac{1}{2}} \right| + C =$$

$$= \ln \left| \frac{x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}} \right| + C = \ln \left| \frac{x + 2}{x + 3} \right| + C$$

II способ

Решим квадратное уравнение

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2};\ x_1 = -3; x_2 = -2;$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} = \int \frac{dx}{(x + 3)(x + 2)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простые дроби:

$$\frac{1}{(x + 3)(x + 2)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x + 3)}{(x + 3)(x + 2)}$$

Приравняем числитель полученной дроби числителю исходной:

$$A(x + 2) + B(x + 3) = 1$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^1: \quad A + B = 0$$
$$x^0: \quad 2A + 3B = 1$$

Решаем систему $\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases}$: $\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$

Таким образом:

$$\int \frac{dx}{(x+3)(x+2)} = \int \left(-\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2}\right) dx = \{\text{по свойству } 6\} =$$
$$= -\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{dx}{x+2} = \{\text{табличные интегралы типа II}\} =$$
$$= -\ln|x+3| + \ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C$$

Ответ:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} = \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C$$

II. $D = p^2 - 4q = 0$

В этом случае

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

и искомый интеграл (1.35) принимает вид

$$I = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \qquad (1.40)$$

Сделав замену $x + \frac{p}{2} = t, dx = dt$, получаем

$$\int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = \{\text{табличный интеграл типа I}(\alpha = -2)\} = -\frac{1}{t} + C$$
$$= -\frac{1}{x + \frac{p}{2}} + C$$

Таким образом, в случае $p^2 = 4q$,

$$I=\int\frac{dx}{x^2+px+q}=-\frac{1}{x+\frac{p}{2}}+C \tag{1.41}$$

Пример 1.18. Найти

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+9}.$$

Решение:

$x^2+6x+9=x^2+2\cdot3\cdot x+3^2=(x+3)^2$

Поэтому

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+9}=\int\frac{dx}{(x+3)^2}=-\frac{1}{x+3}+C$$

Ответ:

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+9}=-\frac{1}{x+3}+C$$

III. $D=p^2-4q>0$

Обозначим

$$\frac{p^2-4q}{4}=-a^2$$

Перепишем интеграл (1.35) в виде

$$I=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2} \tag{1.42}$$

Сделаем замену переменной

$$x+\frac{p}{2}=t, dx=dt$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\{\text{табличный интеграл типа XII }\}=$$

$$=\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{t}{a}+C=\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C$$

Таким образом

$$I=\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C\left(a=\frac{\sqrt{-D}}{2}\right) \tag{1.43}$$

Пример 1.19. Найти

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

Решение:

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + 5 = (x+2)^2 + 1.$$

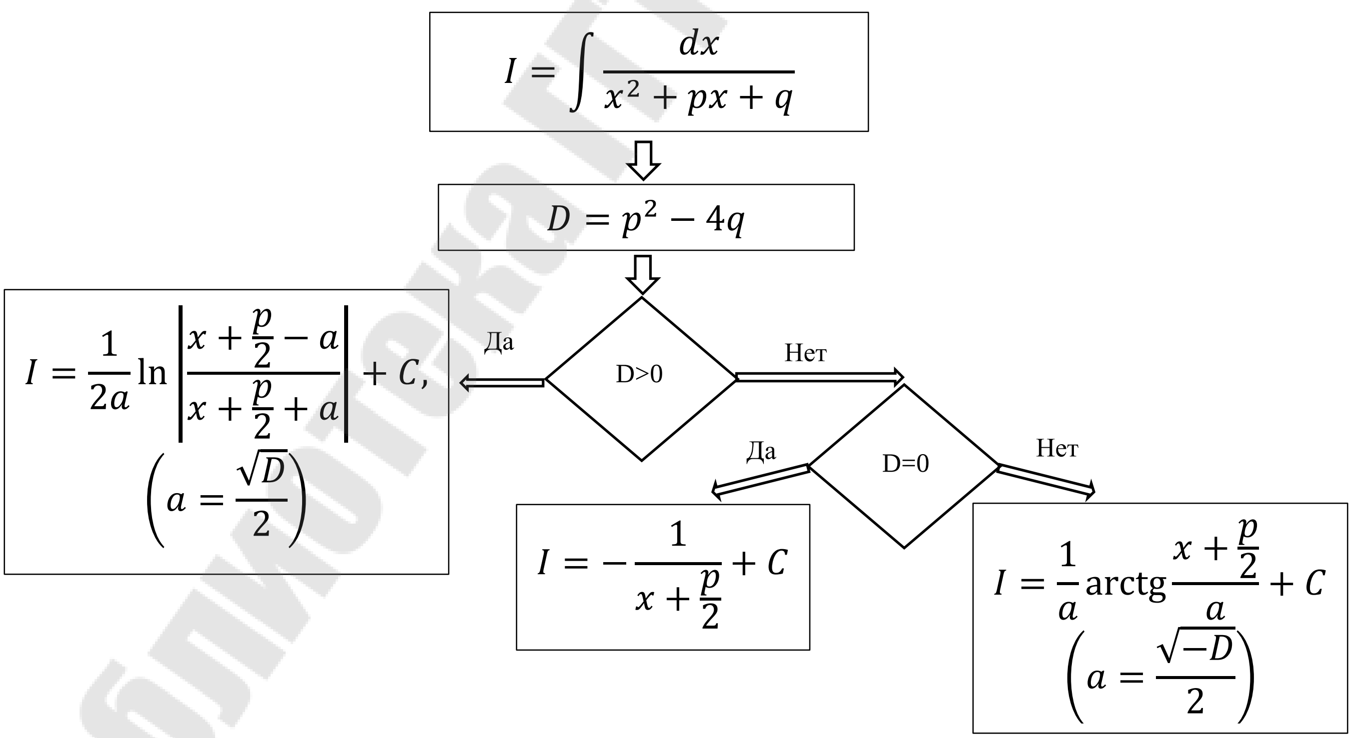
Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = \{x + 2 = t, dx = dt\} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$
$$= \{\text{табличный интеграл типа XII}\} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x+2) + C$$

Ответ:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \operatorname{arctg}(x+2) + C$$

Алгоритм вычисления интегралов (1.35) можно представить в виде следующей блок-схемы:



Вычисление интегралов вида

$$I = \int \frac{(mx+n)dx}{x^2+px+q}. \tag{1.44}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции

$$\int \frac{(mx+n)dx}{x^2+px+q} = \left\{ x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2-4q}{4}; \frac{p^2-4q}{4} = \pm a^2 \right\} =$$

$$= \int \frac{(mx+n)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \pm a^2}$$

Сделаем замену переменной $x+\frac{p}{2}=t$

$$\int \frac{(mx+n)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \pm a^2} = \left\{ x+\frac{p}{2}=t, x=t-\frac{p}{2}, dx=dt \right\} = \int \frac{\left(m\left(t-\frac{p}{2}\right)+n\right)dt}{t^2 \pm a^2} =$$

$$= \int \frac{\left(mt - m\frac{p}{2}+n\right)dt}{t^2 \pm a^2} = \int \left(\frac{mt}{t^2 \pm a^2} + \frac{n-m\frac{p}{2}}{t^2 \pm a^2} \right) dt =$$

$$= \{\text{по свойствам 5 и 6}\} = m\int \frac{tdt}{t^2 \pm a^2} + \left(n - m\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2 \pm a^2} =$$

$$= mI_1 + \left(n - m\frac{p}{2}\right) I_2$$

Интеграл I_1 найдем методом занесения под знак дифференциала:

$$I_1 = \int \frac{tdt}{t^2 \pm a^2} = \left\{ tdt = \frac{1}{2}dt^2 \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{t^2 \pm a^2} = \{t^2 = y, dt^2 = dy\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y \pm a^2} = \{\text{табличный интеграл типа II}\} = \frac{1}{2}\ln|y \pm a^2| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2 \pm a^2| = \frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \pm a^2\right| = \frac{1}{2}\ln|x^2+px+q|$$

интеграл I_1- интеграл типа (1.35), который может быть найден по одной из формул (1.36), (1.37), (1.41) и (1.43) в зависимости от соотношения коэффициентов p и q.

Таким образом,

$$\int \frac{(mx+n)dx}{x^2+px+q} = \frac{m}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(n - m\frac{p}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} \qquad (1.45)$$

Пример 1.20. Найти.

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$$

Решение:

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx = \{x^2-4x+5 = x^2 - 2\cdot 2x + 2^2 - 2^2 + 5 = (x-2)^2+1\}$$

$$= \int \frac{3x-2}{(x-2)^2+1}dx$$

Сделаем замену переменной:

$$\int \frac{3x-2}{(x-2)^2+1}dx = \{x-2=t; x=t+2; dx=dt\} = \int \frac{3(t+2)-2}{t^2+1}dt =$$

$$= \int \frac{3t+4}{t^2+1}dt = \{\text{по свойствам 5 и 6}\} = 3\int \frac{tdt}{t^2+1} + 4\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 3I_1 + 4I_2$$

$$I_1 = \int \frac{tdt}{t^2+1} = \{\text{внесем } t \text{ под знак дифференциала согласно (1.4)}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{t^2+1} = \{t^2 = y\} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+1} = \{\text{табличный интеграл типа II}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|y+1| = \frac{1}{2}\ln|t^2+1| = \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+5|$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \{\text{табличный интеграл типа XII}\} = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg}(x-2)$$

Таким образом

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx = 3\cdot\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+5| + 4\cdot\operatorname{arctg}(x-2) + C$$

Ответ:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx = \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+5| + 4\operatorname{arctg}(x-2) + C$$

Вычисление интегралов вида

$$I = \int \frac{P_k(x)dx}{x^2 + px + q}. \qquad (1.46)$$

где $P_k(x)$- многочлен степени $k \geq 2$.
Выделим целую часть в подынтегральной функции:

$$\begin{array}{r|l} P_k(x) & x^2 + px + q \\ \cline{2-2} \vdots & Q_{k-2}(x) \\ \cline{1-1} mx + n & \end{array}$$

Тогда

$$\int \frac{P_k(x)dx}{x^2 + px + q} = \int \left(Q_{k-2}(x) + \frac{mx + n}{x^2 + px + q}\right) dx$$

Таким образом, интеграл (1.46) сводится к сумме интегралов типа I и интеграла (1.45).

Пример 1.21. Найти.

$$\int \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5x + 6} dx$$

Решение:

Степень числителя подынтегральной функции выше степени знаменателя, поэтому выделим целую часть подынтегральной функции:

$$\begin{array}{r|l} -\; x^3 + 2x + 3 & x^2 + 5x + 6 \\ \cline{2-2} x^3 + 5x^2 + 6x & x - 5 \\ \cline{1-1} -\; -5x^2 - 4x + 3 & \\ -5x^2 - 25x - 30 & \\ \cline{1-1} 21x + 33 & \end{array}$$

Тогда

$$\int \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5x + 6} dx = \int \left(x - 5 + \frac{21x + 33}{x^2 + 5x + 6}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 5x + \int \frac{21x + 33}{x^2 + 5x + 6} dx$$

Получили интеграл типа (1.44).

$$\int \frac{21x + 33}{x^2 + 5x + 6} dx =$$

$$= \left\{x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} =$$

$$= \int \frac{21x + 33}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} dx = \left\{x + \frac{5}{2} = t, x = t - \frac{5}{2}; dx = dt\right\} =$$

$$= \int \frac{21\left(t - \frac{5}{2}\right) + 33}{t^2 - \frac{1}{4}} dt = \int \frac{21t - \frac{39}{2}}{t^2 - \frac{1}{4}} dt = \{\text{по свойствам 5 и 6}\} =$$

$$= 21\int \frac{tdt}{t^2 - \frac{1}{4}} - \frac{39}{2}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{4}} = 21I_1 - \frac{39}{2}I_2$$

$$I_1 = \int \frac{tdt}{t^2 - \frac{1}{4}} = \{\text{внесем } t \text{ под знак дифференциала согласно (1.4)}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{t^2 - \frac{1}{4}} = \{t^2 = y\} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y - \frac{1}{4}} = \{\text{табличный интеграл типа II}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|y - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|t^2 - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 5x + 6|$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{4}} = \left\{\text{табличный интеграл типа XIII}, a = \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{t - \frac{1}{2}}{t + \frac{1}{2}}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}}\right| = \ln\left|\frac{x + 2}{x + 3}\right|$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5x + 6} dx = \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{21}{2}\ln|x^2 + 5x + 6| - \frac{39}{2}\ln\left|\frac{x + 2}{x + 3}\right| + C$$

Заметим, что $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$. Поэтому, используя свойства логарифмов, преобразуем полученный ответ

$$\frac{x^2}{2} - 5x + \frac{21}{2}\ln|(x + 3)(x + 2)| - \frac{39}{2}\ln\left|\frac{x + 2}{x + 3}\right| + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{1}{2}(21\ln(x + 3) + 21\ln(x + 2) - 39\ln(x + 2) + 39\ln(x + 3)) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{1}{2}(60\ln(x + 3) - 18\ln(x + 2)) + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 5x + \ln\left|\frac{(x+3)^{30}}{(x+2)^9}\right| + C$$

Ответ:

$$\int \frac{x^3+2x+3}{x^2+5x+6}dx = \frac{x^2}{2} - 5x + \ln\left|\frac{(x+3)^{30}}{(x+2)^9}\right| + C$$

Задания.

Задание 1.5. Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$ 2. $\int \frac{dx}{x^2-10x+25}$ 3. $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$

4. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$ 5. $\int \frac{xdx}{x^2-6x+5}$ 6. $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}$

7. $\int \frac{(x+3)dx}{3-x^2-2x}$ 8. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-7e^x+12}$ 9. $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx$

10. $\int \frac{4x^3-5x}{x^4+2x^2-3}dx$

<u>Ответы:</u> **1.** $\frac{1}{4}ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C$; **2.** $-1/(x-5) + C$; **3.** $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$;
4. $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C$; **5.** $\frac{1}{2}ln|x^2-6x+5| + \frac{3}{4}ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C$;
6. $\frac{1}{4}ln\left|x^2+x+\frac{5}{2}\right| - \frac{1}{6}arctg\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$; **7.** $-\frac{1}{2}ln|x^2+2x-3| - \frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| +$
$+C$; **8.** $ln\left|\frac{e^x-4}{e^x-3}\right| + C$; **9.** $\frac{1}{2}ln(x^4+x^2+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}\right) + C$;
10. $ln|x^4+2x^2-3| - \frac{9}{8}ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+3}\right| + C$;

§ 1.6. Интегрирование рациональных функций.

Функция, заданная в виде

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m};\ \begin{matrix} a_0 \neq 0 \\ b_0 \neq 0 \end{matrix} \qquad (1.47)$$

называется рациональной функцией.

Если $n < m$, то дробь правильная, при $n \geq m$ - дробь неправильная.

Знаменатель дроби (1.47) всегда можно представить в виде произведения сомножителей типа:

$$Q_m(x) = (x-a)(x-b)^k(x^2+px+q)(x^2+cx+d)^l \qquad (1.48)$$
$$(p^2-4q<0;\, c^2-4d<0)$$

I. Метод интегрирования правильной рациональной дроби состоит в разложении этой дроби на простейшие.

Простейшими называются дроби вида:

$$\frac{A}{x-a}$$
$$\frac{B}{(x-b)^k}$$
$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, D = p^2-4q<0 \qquad (1.49)$$
$$\frac{Kx+L}{(x^2+\mathrm{c}x+d)^l}, D = c^2-4d<0$$

Следует пользоваться следующим правилом:

а) каждому сомножителю типа $(x-a)$ в разложении знаменателя $Q_m(x)$ (1.48) соответствует одно слагаемое:

$$\frac{A}{x-a}$$

б) каждому сомножителю типа $(x-b)^k$ в разложении знаменателя $Q_m(x)$ (1.48) соответствует k слагаемых:

$$\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_k}{(x-b)^k}$$

в) каждому сомножителю типа (x^2+px+q) в разложении знаменателя $Q_m(x)$ (1.48) соответствует одно слагаемое:

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

г) каждому сомножителю типа $(x^2+cx+d)^l$ в разложении знаменателя $Q_m(x)$ (1.48) соответствует l слагаемых:

$$\frac{K_1x+L_1}{x^2+cx+d}+\frac{K_2x+L_2}{(x^2+cx+d)^2}+\cdots+\frac{K_lx+L_l}{(x^2+cx+d)^l}$$

Таким образом, рациональная функция (1.47) может быть преобразована к виду:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-a)(x-b)^k(x^2+px+q)(x^2+cx+d)^l} =$$

$$= \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \qquad (1.50)$$

$$+ \frac{K_1x+L_1}{x^2+cx+d} + \frac{K_2x+L_2}{(x^2+cx+d)^2} + \cdots + \frac{K_lx+L_l}{(x^2+cx+d)^l}$$

Числа $A, B_1, B_2, \cdots, B_k, M, N, C_1, C_2, \cdots, C_l, D_1, D_2, \cdots, D_l$ могут быть найдены с помощью ***метода неопределенных коэффициентов***.

Для этого необходимо:

1) привести к общему знаменателю сумму дробей, стоящую в правой части (1.50);

2) приравнять числитель полученной дроби к $P_n(x)$;

3) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в полученном в п.2 равенстве;

4) решить полученную систему линейных уравнений относительно неизвестных $A, B_1, B_2, \cdots, B_k, M, N, C_1, C_2, \cdots, C_l, D_1, D_2, \cdots, D_l$.

Пример 1.22. Разложить заданную правильную рациональную дробь на простейшие

$$R(x) = \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+3x+4)}$$

Решение:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+3x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+3x+4}$$

Приведем полученную сумму дробей к общему знаменателю:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+3x+4} = \frac{A(x^2+3x+4)+(Mx+N)(x-2)}{(x-2)(x^2+3x+4)}$$

Приравняем числители полученной и исходной дробей:

$$A(x^2+3x+4) + M(x^2-2x) + N(x-2) = 2x^2+2x+13$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^2: A + M = 2$$
$$x^1: 3A - 2M + N = 2$$
$$x^0: 4A - 2N = 13$$

Решение системы:

$$\begin{cases} A = \dfrac{25}{14} \\ M = \dfrac{3}{14} \\ N = -\dfrac{41}{14} \end{cases}$$

Подставляя полученные значения коэффициентов, получаем:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+3x+4)} = \frac{\frac{25}{14}}{x-2} + \frac{\frac{3}{14}x - \frac{41}{14}}{x^2+3x+4} = \frac{1}{14}\left(\frac{25}{x-2} + \frac{3x-41}{x^2+3x+4}\right)$$

Ответ:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+3x+4)} = \frac{1}{14}\left(\frac{25}{x-2} + \frac{3x-41}{x^2+3x+4}\right)$$

Итак,

$$\int R(x)dx = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

может быть представлен в виде суммы интегралов от простейших дробей (1.49):

а) $$\int \frac{dx}{x-a} = \{\text{табличный интеграл типа II}\} = \ln|x-a| + C \qquad (1.50)$$

б) $$\int \frac{dx}{(x-b)^k} = \{\text{табличный интеграл типа I, свойство 7}\} = \\ = \frac{1}{(1-k)(x-b)^{k-1}} + C \qquad (1.51)$$

в) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \{\text{ интеграл типа (1.44)}\} = \\ = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C, a = \frac{\sqrt{-D}}{2} \qquad (1.52)$$

г) $$\int \frac{K_l x + L_l}{(x^2+cx+d)^l}dx = \\ = \frac{K_l}{2}\cdot\frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{(x^2+cx+d)^{l-1}} + \left(L_l - K_l\frac{c}{2}\right)\cdot I_l \qquad (1.53)$$

Интеграл I_l, входящий в (1.53), может быть вычислен с помощью рекуррентной формулы:

$$I_l = \int \frac{dx}{(x^2 + cx + d)^l} = \left\{ t = x + \frac{c}{2}, a^2 = \frac{-D}{4} \right\} = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l} =$$
$$= \frac{1}{(2l-2)a^2} \left(\frac{t}{(t^2 + a^2)^{l-1}} + (2l-3) I_{l-1} \right) \qquad (1.54)$$
Из формулы (1.54) видно, что I_l за $l - 1$ шаг может быть сведен к интегралу типа (1.43).

Пример 1.23 Найти
$$\int \frac{x^2 + 3}{(x-3)(x^2 - 4x + 3)} dx$$
Решение:
Разложим знаменатель подынтегральной функции, используя формулу для разности кубов
$$\int \frac{x^2 + 3}{(x-3)(x^2 - 4x + 3)} dx = \{x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)\} =$$
$$= \int \frac{x^2 + 3}{(x-3)(x-3)(x-1)} dx = \int \frac{x^2 + 3}{(x-3)^2(x-1)} dx$$
Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби согласно (1.50):
$$\frac{x^2 + 3}{(x-3)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-3} + \frac{B_2}{(x-3)^2} =$$
$$= \frac{A(x-3)^2 + B_1(x-3)(x-1) + B_2(x-1)}{(x-3)^2(x-1)}$$

Приравняем числители полученной и исходной дробей:
$$A(x-3)^2 + B_1(x-3)(x-1) + B_2(x-1) = x^2 + 3$$
$$A(x^2 - 6x + 9) + B_1(x^2 - 4x + 3) + x^2{:}\, A + B_1 = 1(x-1) = x^2 + 3$$
Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:
$$\begin{aligned} x^2&: \quad A + B_1 = 1 \\ x^1&: -6A - 4B_1 + B_2 = 0 \\ x^0&: \quad 9A - B_2 = 1 \end{aligned}$$
Решением полученной системы является:
$$\begin{cases} A = \dfrac{5}{7} \\ B_1 = \dfrac{2}{7} \\ B_2 = \dfrac{22}{7} \end{cases}$$

Подставим полученное разложение подынтегральной функции в интеграл:

$$\int \frac{x^2+3}{(x-3)^2(x-1)}dx = \int \left(\frac{\frac{5}{7}}{x-1} + \frac{\frac{2}{7}}{x-3} + \frac{\frac{22}{7}}{(x-3)^2} \right) dx =$$

$$= \frac{5}{7}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{7}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{22}{7}\int \frac{dx}{(x-3)^2} = \{\text{интегралы типа I и II}\} =$$

$$= \frac{5}{7}\ln|x-1| + \frac{2}{7}\ln|x-3| - \frac{22}{7(x-3)} + C =$$

$$= \frac{1}{7}\left(\ln|(x-1)^5(x-3)^2| - \frac{22}{(x-3)}\right) + C$$

Ответ:

$$\int \frac{x^2+3}{(x-3)^2(x-1)}dx = \frac{1}{7}\left(\ln|(x-1)^5(x-3)^2| - \frac{22}{(x-3)}\right) + C$$

II. Интегрирование неправильной рациональной дроби начинается с представления ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби путем деления числителя на знаменатель.

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример 1.24. Найти интеграл

$$\int \frac{x^4+2}{x^3+1}dx$$

Решение: Подынтегральная функция не является правильной, поэтому предварительно необходимо выделить в ней целую часть. Можно разделить числитель на знаменатель, а можно преобразовать числитель:

$$\frac{x^4+2}{x^3+1} = \frac{x(x^3+1-1)+2}{x^3+1} = \frac{x(x^3+1)-x+2}{x^3+1} = x + \frac{-x+2}{x^3+1}$$

Тогда

$$\int \frac{x^4+2}{x^3+1}dx = \int \left(x + \frac{-x+2}{x^3+1}\right)dx = \int xdx + \int \frac{-x+2}{x^3+1}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int \frac{-x+2}{x^3+1}dx$$

Оставшийся интеграл-интеграл от правильной рациональной дроби. Разложим знаменатель, используя формулу для суммы кубов $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$:

$$\int \frac{-x+2}{x^3+1}dx = \int \frac{-x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}dx$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби согласно (1.50):

$$\frac{-x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2-x+1)+(Mx+N)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Приравняем числители полученной и исходной дробей:

$$A(x^2-x+1)+(Mx+N)(x+1) = -x+2$$

$$A(x^2-x+1)+M(x^2+x)+N(x+1) = -x+2$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{aligned} x^2&: \quad A+M=0 \\ x^1&: -A+M+N=-1 \\ x^0&: \quad A+N=2 \end{aligned}$$

Решая полученную систему, получаем:

$$\begin{cases} A=1 \\ M=-1 \\ N=1 \end{cases}$$

Подставляем полученные значения A, M и N в разложение:

$$\frac{-x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2-x+1}$$

Таким образом

$$\int \frac{-x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2-x+1}\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-x+1}{x^2-x+1}dx = \ln|x+1| + \int \frac{-x+1}{x^2-x+1}dx$$

Оставшийся интеграл представляет собой интеграл типа (1.44).

$$\int \frac{-x+1}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \left\{x^2 - x + 1 = x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\} =$$

$$= \int \frac{-x+1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx = \left\{x - \frac{1}{2} = t; x = t + \frac{1}{2}; dx = dt\right\} =$$

$$= \int \frac{-\left(t+\frac{1}{2}\right)+1}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{-t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt = -\int \frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \left\{\text{согласно (1.4)}: tdt = \frac{1}{2}dt^2;\ y = t^2\right\} = -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \{\text{табличные интегралы II и XII}\} = -\frac{1}{2}\ln\left|y+\frac{3}{4}\right| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\int \frac{x^4+2}{x^3+1}dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Ответ:

$$\int \frac{x^4+2}{x^3+1}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Метод Остроградского.

Нахождение неопределенных интегралов от рациональных дробей, знаменатель которых содержит кратные корни, является весьма громоздкой задачей. В ряде случаев процедура может быть упрощена применением метода Остроградского, который состоит в следующем:

Пусть знаменатель подынтегральной дроби имеет вид:

$$Q_m(x) = (x-a)^k(x^2+px+q)^l.$$

Тогда интеграл можно переписать в виде:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \frac{M_m(x)}{(x-a)^{k-1}(x^2+px+q)^{l-1}} + \\ + \int \frac{N_n(x)}{(x-a)(x^2+px+q)}dx \quad (1.55)$$

где $M_m(x)$ и $N_n(x)$- полиномы относительно x степеней на единицу меньших, чем знаменатели соответствующих дробей. Неопределенные коэффициенты, входящие в $M_m(x)$ и $N_n(x)$ найдем, дифференцируя записанное равенство:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \\ = \frac{M'_m(x)(x-a)^{k-1}(x^2+px+q)^{l-1} - M_m(x)((x-a)^{k-1}(x^2+px+q)^{l-1})'}{((x-a)^{k-1}(x^2+px+q)^{l-1})^2} \\ + \frac{N_n(x)}{(x-a)(x^2+px+q)}$$

Далее необходимо привести сумму дробей к общему знаменателю и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях в числителях.

Пример 1.25. Найти

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx$$

.

Решение: применим метод Остроградского. Согласно (1.55) запишем:

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \frac{Mx^2+Nx+K}{(x-1)(x^2+1)}dx$$

Продифференцируем полученное равенство:

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(2Ax+B)(x-1)(x^2+1)-(Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} + \\ + \frac{Mx^2+Nx+K}{(x-1)(x^2+1)}$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и приравняем числители полученных дробей:

$$(2Ax+B)(x-1)(x^2+1)-(Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+1) \\ +(Mx^2+Nx+K)(x-1)(x^2+1) = 4x^2-8x$$

$$A(-x^4+x^2-2x)+B(-2x^3+x^2-1)+C(-3x^2+2x-1) \\ +M(x^5-x^4+x^3-x^2)+N(x^4-x^3+x^2-x) \\ +K(x^3-x^2+x-1) = 4x^2-8x$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{ll} x^5: & M=0 \\ x^4: & -A-M+N=0 \\ x^3: & -2B+M-N+K=0 \\ x^2: & A+B-3C-M+N-K=4 \\ x^1: & -2A+2C-N+K=-8 \\ x^0: & -B-C-K=0 \end{array}$$

Решая полученную систему из 6 линейных уравнений с 6 неизвестными, получаем:

$$\begin{cases} A=3 \\ B=-1 \\ C=0 \\ M=0 \\ N=3 \\ K=1 \end{cases}$$

Таким образом получаем:

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx = \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx =$$

$$= \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$$

Оставшийся интеграл вычислим способом, изложенным выше - разложив подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

Приравняем числители полученной и исходной дробей:

$$A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1) = 3x+1$$

$$A(x^2+1)+M(x^2-x)+N(x-1) = 3x+1$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x;

$$x^2: A+M=0$$
$$x^1: -M+N=3$$
$$x^0: A-N=1$$

Решение полученной системы:

$$\begin{cases} A=2 \\ M=-2 \\ N=1 \end{cases}$$

Таким образом

$$\int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{-2x+1}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{2xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

Первый и третий интегралы являются табличными (типа II и XII), второй интеграл найдем методом занесения под знак дифференциала:

$$\int \frac{2xdx}{x^2+1} = \{\text{согласно (1.4)}\} = \int \frac{dx^2}{x^2+1} = \{\text{табличный интеграл II}\} =$$
$$= \ln|x^2+1|$$

Тогда

$$\int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx = 2\ln|x-1| - \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + C$$
$$= \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + C$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx = \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + C$$

Ответ:
$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx = \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + C$$

Задания.

Задание 1.6. Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x^3+6x^2+11x+6}$ 2. $\int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+2x}dx$ 3. $\int \frac{6x+11}{x^3-13x-12}dx$

4. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$ 5. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$ 6. $\int \frac{2x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$

7. $\int \frac{2x+5}{(x+2)(x+1)^2}dx$ 8. $\int \frac{2x^2+9}{(x+3)x^3}dx$ 9. $\int \frac{x+1}{x(x-1)^3}dx$

10. $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$ 11. $\int \frac{dx}{1-x^3}$ 12. $\int \frac{(x^3+x+1)dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$

13. $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}$ 14. $\int \frac{x^2}{(x-1)^5}dx$ 15. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$

Ответы: **1.** $ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x+2}\right| + C$; **2.** $ln\left|\frac{\sqrt{(x-2)^3}}{(x-1)\sqrt{x}}\right| + C$; **3.** $ln\left|\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4x+3}}\right| + C$;
4. $\frac{x^2}{2} + x + ln\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right| + C$; **5.** $x^2 + 2x + ln\left|\frac{(x-2)^7}{x+1}\right| + C$; **6.** $\frac{x^4}{2} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x +$

$+ln\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right| + C$; **7.** $ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| - \frac{3}{x+1} + C$; **8.** $\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} + ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C$; **9.** $ln\left|\frac{x-1}{x}\right| +$
$+\frac{x-2}{(x-1)^2} + C$;**10.** $\frac{1}{4}ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{arctgx}{2} + C$;**11.** $\frac{1}{3}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{1-x}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$;
12. $ln\left(\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C$; **13.** $\frac{x^2}{2} + x + ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right| - arctgx + C$; **14.** $\frac{4x-6x^2-1}{12(x-1)^4} + C$;
15. $\frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} + ln\sqrt{\left(\frac{x-2}{x}\right)^3} + C$.

§ 1.7. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

I. Интегралы вида

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx = \tag{1.56}$$

находят, применяя различные приемы в зависимости от значений m и n.
1) Хотя бы одно из чисел m и n положительно и нечетно.
Пусть $n = 2l + 1$, тогда интеграл (1.56) можно преобразовать следующим образом:

$$\int \sin^m x \cos^{2l+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2l} x \ \cos x \, dx = \{\text{согласно (1.5)}\} =$$
$$= \int \sin^m x \cos^{2l} x \, d(\sin x) = \{\sin x = t, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \} =$$
$$= \int t^m (1 - t^2)^l dt$$

Аналогично поступают в случае $m = 2k + 1$.

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \ \sin x \, dx = \{\text{согласно (1.6)}\} =$$
$$= -\int \sin^{2k} x \cos^n x \, d(\cos x) = \{\cos x = t, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \} =$$
$$= -\int t^n (1 - t^2)^k dt$$

Таким образом

$$\int \sin^m x \cos^{2l+1} x dx = \{\sin x = t\} = \int t^m (1-t^2)^l dt \tag{1.57}$$

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \{\cos x = t\} = -\int t^n (1-t^2)^k dt \tag{1.58}$$

Пример 1.26. Найти

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

Решение: По условию одна из степеней нечетная, поэтому можно записать

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \ \sin x\, dx = \{\text{согласно } (1.6)\} =$$

$$= -\int \sin^2 x \cos^2 x\, d(\cos x) = \{\cos x = t, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2\} =$$

$$= -\int t^2(1-t^2)dt = -\int (t^2 - t^4)dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + C =$$

$$= -\frac{t^3}{15}(5 - 3t^2) + C = \frac{\cos^3 x}{15}(3\cos^2 x - 5) + C$$

Ответ:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \frac{\cos^3 x}{15}(3\cos^2 x - 5) + C$$

2) Оба числа m и n - четные и положительные (или нуль).

$$I = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x dx = \tag{1.59}$$

В этом случае степени в подынтегральной функции понижаются с помощью формул:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \tag{1.60}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \tag{1.61}$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \tag{1.62}$$

Тогда

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^l dx \tag{1.63}$$

После возведения в соответствующие степени и перемножения полученных выражений получаем табличные интегралы типа I ($\alpha = 0$),IV,V и (1.57),(1.59).

Пример 1.27. Найти

$$\int \sin^2 x \ \cos^2 x \, dx.$$

Решение: преобразуем подынтегральную функцию:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \cdot (2 \sin x \cos x)^2 = \{\text{по формуле } (1.62)\} = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

Применим формулу понижения степени (1.60)

$$\frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$$

Тогда

$$\int \sin^2 x \ \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 4x}{8} \, dx = \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos 4x \ dx\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4} \sin 4x\right) + C = \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

Ответ:

$$\int \sin^2 x \ \cos^2 x \, dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

3) Если хотя бы одно из чисел m и n отрицательное и $m + n$ – нечетно, то заданный интеграл упрощается занесением одной из функций под знак дифференциала методом, аналогичным (1.57), (1.58).

Пример 1.27. Найти

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$$

Решение: преобразуем подынтегральную функцию:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \{\text{согласно } (1.5)\} = \int \frac{d \sin x}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \{\sin x = t, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2\} = \int \frac{dt}{t^2(1 - t^2)}$$

Разложим подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \{t^2 = y\} = \frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{(1-y)} = \frac{A(1-y)+By}{y(1-y)}$$

Приравняем числитель полученной дроби к числителю исходной:

$$A(1-y)+By = 1$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y:

$$\begin{matrix} y^1: -A+B=0 \\ y^0: A=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=1' \end{matrix}$$

получаем

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{(1-y)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{(1-t^2)}$$

Тогда

$$\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right) dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \{\text{табличные интегралы I и XIII}\} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

Возвращаясь к исходной переменной $\sin x = t$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C$$

4) Если $m + n = -2k$

В этом случае подынтегральная функция записывается в виде дроби.

В знаменателе этой дроби выделяется множитель $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$). Выражение $\frac{dx}{\cos^2 x}\left(\frac{dx}{\sin^2 x}\right)$ заменяется, согласно (1.11) ((1.12)) на $d(\operatorname{tg} x)\big(-d(\operatorname{ctg} x)\big)$.

Делается замена $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 1.28. Найти

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx.$$

Решение:

В данном случае $m + n = 4 - 8 = -4$, поэтому для вычисления данного интеграла воспользуемся схемой, описанной в пункте 4

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$=\left\{\frac{dx}{\cos^2 x}=d(\operatorname{tg}x);\frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}=\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}^4 x\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x);\operatorname{tg}x=t\right\}=$$

$$=\int t^4(1+t^2)dt=\int(t^4+t^6)dt=\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C=\frac{t^5}{35}(7+5t^2)+C=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{35}(7+5\operatorname{tg}^2 x)+C$$

Ответ:

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}dx=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{35}(7+5\operatorname{tg}^2 x)+C$$

II. Интегралы вида

$$\begin{aligned}&\int\cos(a_1x+b_1)\cos(a_2x+b_2)\,dx\\&\int\cos(a_1x+b_1)\sin(a_2x+b_2)\,dx\\&\int\sin(a_1x+b_1)\sin(a_2x+b_2)\,dx\end{aligned}\tag{1.64}$$

преобразуются с помощью тригонометрических формул

$$\begin{aligned}\cos\alpha\ \cos\beta&=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\\\sin\alpha\ \sin\beta&=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\\\cos\alpha\sin\beta&=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))\end{aligned}\tag{1.65}$$

Пример 1.29. Найти.

$$\int\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$$

Решение:

Преобразуем подынтегральную функцию с помощью формул (1.65):

$$\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}=\sin x\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{6}-\cos\frac{5x}{6}\right)=\frac{1}{2}\sin x\cos\frac{x}{6}-\frac{1}{2}\sin x\ \cos\frac{5x}{6}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{7x}{6}+\sin\frac{5x}{6}\right)-\frac{1}{4}\left(\sin\frac{11x}{6}+\sin\frac{x}{6}\right)$$

Тогда

$$\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx = \frac{1}{4}\int\left(\sin\frac{7x}{6}+\sin\frac{5x}{6}-\sin\frac{11x}{6}-\sin\frac{x}{6}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{6}-\frac{6}{5}\cos\frac{7x}{5}+\frac{6}{11}\cos\frac{11x}{6}+6\cos\frac{x}{6}\right)+C$$

Ответ:

$$\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{6}-\frac{6}{5}\cos\frac{7x}{5}+\frac{6}{11}\cos\frac{11x}{6}+6\cos\frac{x}{6}\right)+C$$

III. Интегралы вида:

$$\int \mathrm{tg}^m x\, dx\,; \int \mathrm{ctg}^m x\, dx$$

где m - целое положительное число, преобразующиеся с помощью тригонометрических формул:

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}-1 \qquad (1.66)$$
$$\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}-1$$

При применении этих формул последовательно понижается степень тангенса или котангенса.

Пример 1.30. Найти

$$\int \mathrm{tg}^5 x\, dx$$

Решение:

$$\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \int \mathrm{tg}^3 x\ \cdot \mathrm{tg}^2 x dx = \{\text{согласно } (1.66)\} = \int \mathrm{tg}^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx =$$
$$= \int \mathrm{tg}^3 x\,\frac{dx}{\cos^2 x} - \int \mathrm{tg}^3 x\, dx = \left\{\text{согласно } (1.11)\,\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\mathrm{tg}\, x)\right\} =$$

$$= \int \mathrm{tg}^3 x\, d(\mathrm{tg}\, x) - \int \mathrm{tg}\, x\cdot \mathrm{tg}^2 x\, dx = \{\text{согласно } (1.66)\} = \int \mathrm{tg}^3 x\, d(\mathrm{tg}\, x) -$$
$$-\int \mathrm{tg}\, x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int \mathrm{tg}^3 x\, d(\mathrm{tg}\, x) - \int \mathrm{tg}\, x\,\frac{dx}{\cos^2 x} + \int \mathrm{tg}\, x\, dx =$$
$$= \int \mathrm{tg}^3 x\, d(\mathrm{tg}\, x) - \int \mathrm{tg}\, x\ \ d(\mathrm{tg}\, x) + \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \{\text{согласно } (1.6)\} =$$

$$= \int \operatorname{tg}^3 x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x \; d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \{\operatorname{tg} x = t; \cos x = y\} =$$

$$= \int t^3 dt - \int t dt - \int \frac{dy}{y} = \{\text{табличные интегралы типа I и II}\} =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - \ln|y| + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$$

Ответ:

$$\int \operatorname{tg}^5 x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$$

Универсальная тригонометрическая подстановка.

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(\cos x, \sin x) dx \tag{1.67}$$

Данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции аргумента t с помощью замены переменной, называемой ***универсальной тригонометрической подстановкой:***

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; x = 2 \operatorname{arctg} x; dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \tag{1.68}$$

Тогда, воспользовавшись тригонометрическими формулами:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \tag{1.69}$$

получаем:

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) \frac{2dt}{1 + t^2} = \int R_1(t) dt \tag{1.70}$$

Пример 1.31. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$$

Решение: сделаем универсальную тригонометрическую подстановку (1.68). Тогда, воспользовавшись формулой (1.69), получаем:

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \left\{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right\} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{a\frac{1-t^2}{1+t^2} + b\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{-at^2 + 2bt + a}$$

Найдем полученный интеграл методом, разобранным в параграфе 1.5

$$\int \frac{2dt}{-at^2 + 2bt + a} = -\frac{2}{a}\int \frac{dt}{t^2 - 2\frac{b}{a}t - 1} =$$

$$= \left\{t^2 - 2\frac{b}{a}t - 1 = t^2 - 2\frac{b}{a}t + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1 = \left(t - \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 + a^2}{a^2}\right\} =$$

$$= -\frac{2}{a}\int \frac{dt}{\left(t - \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 + a^2}{a^2}} = \left\{t - \frac{b}{a} = y, dt = dy; \frac{b^2 + a^2}{a^2} = c^2\right\} =$$

$$= -\frac{2}{a}\int \frac{dt}{y^2 - c^2} = \{\text{табличный интеграл типа XIII}\} = -\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2c}\ln\left|\frac{y-c}{y+c}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}\ln\left|\frac{t - \frac{b}{a} - \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{a}}{t - \frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{a}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2}}\ln\left|\frac{at - b + \sqrt{b^2 + a^2}}{at - b - \sqrt{b^2 + a^2}}\right| + C$$

Возвращаясь к исходной переменной x $\left(t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ получаем

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2}}\ln\left|\frac{at - b + \sqrt{b^2 + a^2}}{at - b - \sqrt{b^2 + a^2}}\right| + C$$

Следует заметить, что в случае, если подынтегральная функция $R(\cos x, \sin x)$ является чётной по обоим аргументам, т.е. $R(\cos x, \sin x) =$

$R(-\cos x, -\sin x)$, то нахождение интеграла (1.67) заметно упрощается, если вместо замены (1.68) сделать подстановку

$$\operatorname{tg} x = t; x = \operatorname{arctg} x\, ; dx = \frac{dt}{1+t^2} \tag{1.71}$$

В этом случае следует использовать тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \tag{1.72}$$

Пример 1.32. Найти

$$\int \frac{dx}{4-\cos^2 x + 5\sin^2 x}.$$

Решение: Подынтегральная функция является чётной по обоим аргументам:

$$\frac{1}{4-(-\cos x)^2 + 5(-\sin x)^2} = \frac{1}{4-\cos^2 x + 5\sin^2 x}$$

Сделаем замену (1.71): $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} x\, ; dx = \frac{dt}{1+t^2}$.
Используя формулы (1.72), получаем:

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

Подставляем $\sin^2 x$, $\cos^2 x, dx$ в искомый интеграл:

$$\int \frac{dx}{4-\cos^2 x + 5\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4-\frac{1}{1+t^2}+5\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{9t^2+3} =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+\left(\sqrt{3}t\right)^2} = \{\text{табличный интеграл XII и свойство 7}\} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3}t + \mathrm{C} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} \operatorname{tg} x\right) + \mathrm{C}$$

Ответ:

$$\int \frac{dx}{4 - \cos^2 x + 5\sin^2 x} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} \operatorname{tg} x\right) + \mathrm{C}$$

Задания.

Задание 1.7. Найти интегралы.

1. $\int cos^3 x\, dx$
2. $\int sin^3 x\, cos^2 x\, dx$
3. $\int sin^5 x \sqrt[3]{cos^2 x}\; dx$
4. $\int sin^4 x\, dx$
5. $\int cos^6 x\, dx$
6. $\int \frac{dx}{cos^4 x}$
7. $\int \frac{dx}{sin^4 x}$
8. $\int \frac{dx}{sin^2 x\, cos^2 x}$
9. $\int \frac{dx}{sin^3 x\, cosx}$
10. $\int \frac{dx}{cos^2 x\, sinx}$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{cos^7 x\, sinx}}$
12. $\int tg^4 x\, dx$
13. $\int ctg^6 x\, dx$
14. $\int cos2x\, cos6x\, dx$
15. $\int sin3x\, cos5x\, dx$
16. $\int sin2x\, cos7x\, dx$
17. $\int cosx\, cos\frac{x}{2} cos\frac{x}{4}\; dx$
18. $\int \frac{dx}{sin^3 x}$
19. $\int \frac{dx}{5 - 3cosx}$
20. $\int \frac{dx}{sinx + cosx}$
21. $\int \frac{dx}{8 - 4sinx + 7cosx}$
22. $\int \frac{dx}{9 + sinx + 8cosx}$
23. $\int \frac{dx}{sin^2 x - 5cosx \cdot sinx}$
24. $\int \frac{dx}{5 - 9sin^2 x - cos^2 x}$

Ответы: **1.** $\sin x - \frac{1}{3} sin^3 x + C$; **2.** $-\frac{1}{3} cos^3 x + \frac{1}{5} cos^5 x + C$;
3. $-\frac{3}{5} \sqrt[3]{cos^5 x} + \frac{6}{11} \sqrt[3]{cos^{11} x} - \frac{3}{17} \sqrt[3]{cos^{17} x} + C$; **4.** $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$;
5. $\frac{5}{16} x + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} sin^3 2x + C$; **6.** $tg\, x + \frac{1}{3} tg^3 x + C$;

7. $-ctg\,x-\frac{1}{3}ctg^3x+C$; **8.** $tgx-2\,ctg\,x-\frac{1}{3}ctg^3x+C$; **9.** $ln|tgx|-\frac{1}{2sin^2x}+$
$+C$; **10.** $ln|ctgx|-\frac{1}{cosx}+C$; **11.** $2\sqrt{tgx}+\frac{2}{5}\sqrt{tg^5x}+C$; **12.** $\frac{tg^3x}{3}-tg\,x+x+C$;
13. $-\frac{1}{5}ctg^5x+\frac{1}{3}ctg^3x-ctg\,x-x+C$; **14.** $\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 8x+C$;
15. $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C$; **16.** $-\frac{1}{18}\cos 9x-\frac{1}{10}\cos 5x+C$; **17.** $\frac{1}{4}\sin\frac{7x}{4}+$
$+\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4}+\sin\frac{x}{4}+C$; **18.** $\frac{1}{8}\cdot\left(tg^2\left(\frac{x}{2}\right)-tg^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+ln\sqrt{tg\frac{x}{2}}+C$;
19. $\frac{1}{2}arctg\left(2tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$; **20.** $\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)-1+\sqrt{2}}{tg\left(\frac{x}{2}\right)-1-\sqrt{2}}\right|+C$; **21.** $ln\left|\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)-5}{tg\left(\frac{x}{2}\right)-3}\right|+C$;
22. $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)+1}{4}\right)+C$; **23.** $\frac{1}{5}ln\left|\frac{tgx-5}{tgx}\right|+C$; **24.** $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tgx+1}{2}\right)+C$.

§ 1.8. Интегрирование иррациональных функций.

I. Интегралы вида

$$I=\int R\left(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},\cdots,\sqrt[n_l]{x^{m_l}}\right)dx \qquad (1.73)$$

сводятся к интегралам от рациональной функции с помощью замены

$$x=t^k,dx=kt^{k-1}dt \qquad (1.74)$$

где k - наименьшее общее кратное чисел $n_1,n_2,\cdots n_l$.

Пример 1.32. Найти

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$$

Решение: По условию $n_1=2,n_2=3;\ k=\text{НОК}\{2{,}3\}=6.$
Сделаем замену согласно (1.74) $x=t^6,dx=6t^5dt$.

Тогда

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\int\frac{\sqrt{t^6}6t^5dt}{\sqrt{t^6}-\sqrt[3]{t^6}}=6\int\frac{t^3\cdot t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^6dt}{t-1}$$

Получили интеграл от рациональной функции, которая является неправильной рациональной дробью. Для нахождения полученного интеграла воспользуемся методом, описанным в параграфе 1.6.
Выделим целую часть подынтегральной функции:

$$\frac{t^6}{t-1} = \frac{t^6-1+1}{t-1} = \frac{t^6-1}{t-1} + \frac{1}{t-1} =$$
$$= \{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})\} =$$
$$= \frac{(t-1)(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)}{t-1} + \frac{1}{t-1} =$$
$$= (t^5+t^4+t^3+t^2+t+1) + \frac{1}{t-1} =$$

Таким образом

$$6\int \frac{t^6 dt}{t-1} = 6\int \left(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$
$$= \{\text{табличные интегралы типа I и II}\} =$$
$$= 6\left(\frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + C$$

Возвращаясь к исходной переменной x получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = x + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 6x + \ln\left|x^{\frac{1}{6}}-1\right| + C =$$
$$= x + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6x + \ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right| + C$$

Ответ:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = x + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6x + \ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right| + C$$

II. Интегралы вида

$$I = \int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \cdots, \sqrt[n_l]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad (1.75)$$

рационализируется подстановкой:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k \qquad (1.76)$$

где k - наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \cdots n_l$

Пример 1.33. Найти интеграл

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$$

Решение: сделаем подстановку (1.76)

$$\frac{1-x}{1+x} = t^2$$

Найдем x:

$$1 - x = t^2(1+x) \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)' dt = \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}$$

Тогда

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{x} dx = \int t \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2} = 4 \int \frac{-t^2 dt}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{-t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} = \{t^2 = y\} = \frac{-y}{(1-y)(1+y)} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} =$$

$$= \frac{A(1+y) + B(1-y)}{(1-y)(1+y)}$$

Приравниваем числители дробей:

$$A(1+y) + B(1-y) = -y$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях y:

$$\begin{matrix} y^1: A - B = -1 \\ y^0: A + B = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

Таким образом

$$\frac{-t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} = \frac{-y}{(1-y)(1+y)} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-y} + \frac{\frac{1}{2}}{1+y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1}\right)$$

Тогда

$$4\int\frac{-t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)}=4\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\int\frac{dt}{t^2-1}+2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\{\text{табличные интегралы типа XIII и XII}\}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2\,\mathrm{arctg}\,t+C$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$$

Ответ:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$$

III. Интегрирование выражений, содержащих $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

1. Интегралы вида

$$\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \qquad (1.77)$$

Находятся методами, аналогичными описанным в параграфе 1.5 (интегрирование квадратного трехчлена).

Для нахождения данного интеграла необходимо выделить полный квадрат под знаком радикала и сделать соответствующую замену переменной:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)$$

где $D=b^2-4ac$- дискриминант квадратного уравнения ax^2+bx+c.

Заметим, что если $a<0, D<0$, то подынтегральная функция не определена ни при каких значениях x.

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{mx+n}{\sqrt{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)}}dx =$$

$$\left\{x+\frac{b}{2a}=t, x=t-\frac{b}{2a}, dx=dt\right\} = \int \frac{m\left(t-\frac{b}{2a}\right)+n}{\sqrt{a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right)}}dt$$

Разобьем полученный интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{m\left(t-\frac{b}{2a}\right)+n}{\sqrt{a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right)}}dt = m\int \frac{tdt}{\sqrt{a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right)}} + \left(n-\frac{bm}{2a}\right)\int \frac{dt}{\sqrt{a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right)}} =$$
$$= mI_1 + \left(n-\frac{bm}{2a}\right)I_2$$

Первый из полученных интегралов I_1 вычисляется методом занесения под знак дифференциала:

$$I_1 = \int \frac{tdt}{\sqrt{a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right)}} = \{\text{согласно } (1.4)\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{\sqrt{a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right)}} =$$
$$= \left\{y = a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right); dy = adt^2; dt^2 = \frac{1}{a}dy\right\} =$$
$$= \frac{1}{2a}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \left\{\text{табличный интеграл типа I}, \alpha = -\frac{1}{2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{2a}\cdot\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + C$$

Второй из интегралов при $a > 0$ представляет собой интеграл типа XV, а при $a < 0, D > 0$ - табличному интеграла типа XIV.
В случае $a < 0, D < 0$ интеграл (1.77) не имеет смысла.

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} +$$
$$+\left(n-\frac{bm}{2a}\right)\cdot\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|, a>0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{D}}, a<0, D>0\end{array}\right. \quad (1.78)$$

Пример 1.34. Найти

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$$

Решение:

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении:

$$1-x-x^2=-(x^2+x-1)=-\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1\right)=$$

$$=-\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}dx=\left\{x+\frac{1}{2}=t; x=t-\frac{1}{2}; dx=dt\right\}=$$

$$=\int \frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)-8}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}dx=\int \frac{2t-9}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}dt=\int \frac{2t}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}dt-\int \frac{9}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}dt=$$

$$=\int \frac{dt^2}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}-9\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}=\left\{\frac{5}{4}-t^2=y; dy=-dt^2\right\}=$$

$$=-\int \frac{dy}{\sqrt{y}}-9\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}=\{\text{табличные интегралы типа I и XIV}\}=$$

$$=-2\sqrt{y}-9\arcsin\frac{2t}{\sqrt{5}}+C=-2\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}-9\arcsin\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}+C$$

Ответ:

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C$$

2. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^k \sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{1.79}$$

упрощаются с помощью подстановки

$$mx+n=\frac{1}{t}, x=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{t}-n\right), dx=-\frac{1}{m}\frac{dt}{t^2} \tag{1.80}$$

тогда

$$ax^2+bx+c=a\left(\frac{1}{m}\left(\frac{1}{t}-n\right)\right)^2+b\frac{1}{m}\left(\frac{1}{t}-n\right)+c=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{m^2t^2}$$

Интеграл (1.79) принимает вид

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int \frac{t^k dt}{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}}, \tag{1.81}$$

Полученный интеграл (1.81) находится методом, описанным выше.

Пример 1.35. Найти

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Решение: сделаем замену (1.80):

$$x+1=\frac{1}{t}, x=\frac{1}{t}-1, dx=-\frac{dt}{t^2}$$

$$x^2+2x+2=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+2\left(\frac{1}{t}-1\right)+2=\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1+\frac{2}{t}-2+2=\frac{1+t^2}{t^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}=-\int \frac{t^2\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}=$$

$$=\left\{t^2=y, dy=2tdt, tdt=\frac{1}{2}dy\right\}=-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1+y}}=$$

$$=\{\text{табличный интеграл типа I, свойство 7}\}=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+y}+C=$$

$$=-\sqrt{1+2t^2}+C=-\sqrt{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}+C=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C$$

Ответ:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C$$

3. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx \tag{1.82}$$

могут быть сведены к интегралам от рациональной функции с помощью одной из подстановок Эйлера.

$$c > 0: \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c} \tag{1.83}$$

$$ax^2 + bx + c = t^2x^2 + 2tx\sqrt{c} + c$$
$$ax + b = t^2x + 2t\sqrt{c}$$
$$x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}; dx = 2\frac{t^2\sqrt{c} - tb + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}dt$$
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t\frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2} + \sqrt{c} = \frac{t^2\sqrt{c} - tb + a\sqrt{c}}{a - t^2}$$

$$a > 0: \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t \tag{1.84}$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2tx\sqrt{a} + t^2$$
$$bx + c = 2tx\sqrt{a} + t^2$$
$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}; dx = 2\frac{-t^2\sqrt{a} + tb - c\sqrt{a}}{\left(b - 2t\sqrt{a}\right)^2}dt$$
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}} + t = \frac{-t^2\sqrt{a} + tb - c\sqrt{a}}{b - 2t\sqrt{a}}$$

$$D = b^2 - 4ac > 0: \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1) \tag{1.85}$$

x_1-один из действительных корней квадратного уравнения.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
$$\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1)$$
$$a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2$$
$$a(x - x_2) = t^2\,(x - x_1)$$
$$x = \frac{ax_2 - t^2x_1}{a - t^2}; dx = \frac{2at(x_2 - x_1)}{(a - t^2)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t\left(\frac{ax_2 - t^2x_1}{a - t^2} - x_1\right) = \frac{at(x_2 - x_1)}{a - t^2}$$

Пример 1.36 Найти

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+4x+5}}$$

Решение:

Дискриминант $D = 16 - 25 = -9 < 0$, поэтому мы не можем воспользоваться подстановкой (1.85). Воспользуемся подстановкой (1.84):

$$\sqrt{x^2+4x+5} = x + t$$

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2tx + t^2$$

$$4x + 5 = 2tx + t^2$$

$$x = \frac{t^2-5}{4-2t}$$

$$dx = \frac{2t(4-2t)+2(t^2-5)}{(4-2t)^2}dt = \frac{-2t^2+8t-10}{(4-2t)^2}dt$$

$$\sqrt{x^2+4x+5} = \frac{t^2-5}{4-2t} + t = \frac{-t^2+4t-5}{4-2t}$$

Тогда

$$x+\sqrt{x^2+4x+5} = \frac{t^2-5}{4-2t} + \frac{-t^2+4t-5}{4-2t} = \frac{4t-10}{4-2t}$$

Подставим все полученные выражения в интеграл:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{\frac{-2t^2+8t-10}{(4-2t)^2}dt}{\frac{4t-10}{4-2t}} = \int \frac{-2t^2+8t-10}{(4t-10)(4-2t)}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{t^2-4t+5}{\left(t-\frac{5}{2}\right)(t-2)}dt$$

Получили интеграл от рациональной функции.

Выделим целую часть подынтегральной функции:

$$\frac{t^2-4t+5}{\left(t-\frac{5}{2}\right)(t-2)} = \frac{t^2-4t+5}{t^2-\frac{9}{2}t+5} = \frac{t^2-\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}t-4t+5}{t^2-\frac{9}{2}t+5} = 1 + \frac{\frac{1}{2}t}{\left(t-\frac{5}{2}\right)(t-2)}$$

Тогда

$$\frac{1}{4}\int \frac{t^2-4t+5}{\left(t-\frac{5}{2}\right)(t-2)}dt = \frac{1}{4}\int\left(1+\frac{\frac{1}{2}t}{\left(t-\frac{5}{2}\right)(t-2)}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int dt + \frac{1}{8}\int \frac{tdt}{\left(t-\frac{5}{2}\right)(t-2)} =$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{t}{\left(t-\frac{5}{2}\right)(t-2)} = \frac{A}{\left(t-\frac{5}{2}\right)} + \frac{B}{(t-2)} = \frac{A(t-2)+B\left(t-\frac{5}{2}\right)}{\left(t-\frac{5}{2}\right)(t-2)}$$

Приравняем числители исходной и полученной дробей:

$$A(t-2)+B\left(t-\frac{5}{2}\right) = t$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$\begin{array}{l} t^1: A+B=1 \\ t^0: -2A-\frac{5}{2}B=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-4 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int \frac{1}{\left(t-\frac{5}{2}\right)(t-2)}dt = \int\left(\frac{5}{\left(t-\frac{5}{2}\right)} + \frac{-4}{(t-2)}\right)dt = 5\ln\left|t-\frac{5}{2}\right| - 4\ln|t-2| =$$

$$= \ln\left|\frac{\left(t-\frac{5}{2}\right)^5}{(t-2)^4}\right| + C$$

Получаем

$$\frac{1}{4}\int \frac{t^2-4t+5}{\left(t-\frac{5}{2}\right)(t-2)}dt = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\left(t-\frac{5}{2}\right)^5}{(t-2)^4}\right| + C$$

Вернемся к исходной переменной x:

$$t = \sqrt{x^2+4x+5} - x$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+4x+5}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{x^2+4x+5} - x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(2\sqrt{x^2+4x+5}-2x-5\right)^5}{2\left(2\sqrt{x^2+4x+5}-2x-4\right)^4}\right|\right) + \mathrm{C} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{x^2+4x+5} - x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(2\sqrt{x^2+4x+5}-2x-5\right)^5}{\left(2\sqrt{x^2+4x+5}-2x-4\right)^4}\right|\right) + \mathrm{C}$$

Ответ:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+4x+5}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{x^2+4x+5} - x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(2\sqrt{x^2+4x+5}-2x-5\right)^5}{\left(2\sqrt{x^2+4x+5}-2x-4\right)^4}\right|\right)$$

Пример 1.37 Найти

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}$$

Решение:

Дискриминант $D = 9 - 8 = 1 > 0$, поэтому мы можем воспользоваться подстановкой (1.85):

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}; x_1 = -2; x_1 = -1$$

$$x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+2) \Rightarrow \sqrt{(x+2)(x+1)} = t(x+2) \Rightarrow$$

$$(x+2)(x+1) = t^2(x+2)^2 \Rightarrow (x+1) = t^2(x+2)$$

$$x = \frac{2t^2-1}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{(1-t^2)^2}$$

$$\sqrt{x^2+3x+2} = t\left(\frac{2t^2-1}{1-t^2}+2\right) = \frac{t}{1-t^2}$$

$$x-\sqrt{x^2+3x+2} = \frac{2t^2-1}{1-t^2} - \frac{t}{1-t^2} = \frac{2t^2-t-1}{1-t^2}$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+3x+2}} = \int \frac{\frac{2tdt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2t^2-t-1}{1-t^2}} = \int \frac{2tdt}{(2t^2-t-1)(1-t^2)} =$$

$$= \left\{2t^2-t-1 = 2(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\} = \int \frac{2tdt}{2(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)(1-t)(t+1)} =$$

$$= \int \frac{-tdt}{(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+1)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{-t}{(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{\left(t-\frac{1}{2}\right)}+\frac{D}{(t+1)}=$$

$$=\frac{A(t-1)(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)+B(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)+C(t-1)^2(t+1)+D(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)}{(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+1)}$$

Приравниваем числители полученной и исходной дробей:

$$A\left(t^3-\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}\right)+B\left(t^2+\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)+C(t^3-t^2-t+1)$$
$$+D\left(t^3-\frac{5t^2}{2}+2t-\frac{1}{2}\right)=-t$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$x^3:\qquad A+C+D=0$$
$$x^2:-\frac{1}{2}A+B-C-\frac{5}{2}D=0$$
$$x^1:-A+\frac{1}{2}B-C+2D=-1$$
$$x^0:\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B+C-\frac{1}{2}D=0$$

Решая полученную систему, получаем:

$$A=\frac{5}{18};\quad B=-1;\quad C=-\frac{1}{3};\quad D=\frac{1}{18}$$

Подставляем полученное разложение в интеграл:

$$\int\frac{tdt}{(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+1)}=\int\left(\frac{\frac{5}{18}}{t-1}-\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{-\frac{1}{3}}{\left(t-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\frac{1}{18}}{(t+1)}\right)dt=$$

$$=\frac{5}{18}\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{(t-1)^2}-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-\frac{1}{2}}+\frac{1}{18}\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=\frac{5}{18}\ln|t-1|+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{3}\ln\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{18}\ln|t+1|+C=$$

$$=\frac{1}{t-1}+\frac{1}{18}\ln\left|\frac{(t-1)^5(t+1)}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^3}\right|+C=\frac{1}{t-1}+\frac{1}{18}\ln\left|\frac{(t-1)^5(t+1)}{(2t-1)^3}\right|+C$$

Необходимо вернуться к исходной переменной;

$$t=\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

Тогда

$$\frac{1}{t-1}+\frac{1}{18}\ln\left|\frac{(t-1)^5(t+1)}{(2t-1)^3}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}-1}+\frac{1}{18}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}-1\right)^5\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}+1\right)}{\left(2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}-1\right)^3}\right|+C=$$

$$=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}+\frac{1}{18}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)^5\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)^3\sqrt{(x+2)^3}}\right|+C$$

Ответ:

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}+\frac{1}{18}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)^5\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)^3\sqrt{(x+2)^3}}\right|+C$$

4. Интегралы от $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right), R\left(x,\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$ могут быть найдены с помощью ***тригонометрических и гиперболических подстановок.***

а) Интеграл вида

$$I=\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \tag{1.86}$$

упрощается с помощью подстановки

$$x=a\sin t\,;dx=a\cos t\,dt;\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t \tag{1.87}$$

Интеграл (1.86) принимает вид:

$$I=\int R(a\sin t\,,a\cos t)a\cos t\,dt=\int R_1(\sin t\,,\cos t)dt \tag{1.88}$$

Нахождение интегралов типа (1.88) подробно рассмотрено в параграфе 1.7.

б) Интеграл вида

$$I=\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx \tag{1.89}$$

приводится к интегралам типа (1.88) с помощью подстановки:

$$x = \frac{a}{\cos t}; dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt; \sqrt{x^2 - a^2} = a \frac{\sin t}{\cos t} \tag{1.90}$$

Заметим, что интеграл (1.89) может быть упрощен с помощью гиперболической подстановки

$$x = a \operatorname{ch} t\,; dx = a \operatorname{sh} t\, dt; \sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{sh} t \tag{1.91}$$

В этом случае интеграл (1.89) приводится к виду

$$I = \int R(a \operatorname{ch} t\,, a \operatorname{sh} t) a \operatorname{sh} t\, dt = \int R_1(\operatorname{ch} t\,, \operatorname{sh} t) dt, \tag{1.92}$$

и вычисляется методами, аналогичными тем, что применяются для интегралов (1.88).

в) Интеграл вида

$$I = \int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx \tag{1.93}$$

приводится к интегралам типа (1.88) с помощью подстановки:

$$x = a \operatorname{tg} t\,; dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt; \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t} \tag{1.94}$$

Заметим, что интеграл (1.93) может быть с помощью гиперболической подстановки

$$x = a \operatorname{sh} t\,; dx = a \operatorname{ch} t\, dt; \sqrt{x^2 + a^2} = a \operatorname{ch} t \tag{1.95}$$

приведен к виду (1.92).

Пример 1.38 Найти

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx$$

Решение:

Заданный интеграл-интеграл типа (1.86).

Сделаем тригонометрическую подстановку (1.87):

$$x = 2 \sin t\,; dx = 2 \cos t\, dt$$

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\sqrt{1 - \sin^2 t} dt = 2 \cos t$$

Тогда

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = \int 2 \cos t \cdot 2 \cos t\, dt = 4 \int \cos^2 t\, dt = \{\text{согласно (1.61)}\} =$$

$$= 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\int dt + 2\int \cos 2t\,dt = 2t + \sin 2t + C$$

Вернемся к исходной переменной:

$$t = \arcsin\frac{x}{2};$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = \begin{Bmatrix} \sin t = \dfrac{x}{2} \\ \cos t = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2} \end{Bmatrix} = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}$$

Таким образом, получаем:

Ответ:

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2} + \mathrm{C}$$

Пример 1.39 Найти

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}dx$$

Решение:

Заданный интеграл-интеграл типа (1.89).

I способ. Тригонометрическая подстановка (1.90):

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}dx = \left\{x = \frac{1}{\cos t}; dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt; \sqrt{x^2-1} = \frac{\sin t}{\cos t}\right\} =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 t}\frac{\sin t}{\cos t}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^6 t}\cos t\,dt =$$

$$= \{\sin t = y, dy = \cos t\,dt, \cos^2 t = 1-\sin^2 t = 1-y^2\} =$$

$$= \int \frac{y^2}{(1-y^2)^3}dy = -\int \frac{y^2}{(y^2-1)^3}dy$$

Для вычисления полученного интеграла воспользуемся методом Остроградского (1.55):

$$\int \frac{y^2}{(y^2-1)^3}dy = \frac{Ay^3+By^2+Cy+D}{(y^2-1)^2} + \int \frac{My+N}{y^2-1}dy$$

Продифференцировав обе части равенства, получаем:

$$\frac{y^2}{(y^2-1)^3} = \frac{A(-y^4-3y^2)+B(-2y^3-2y)+C(-3y^2-1)-4Dy}{(y^2-1)^3} + \frac{My+N}{y^2-1}$$

Приведем дроби, стоящие в правой части равенства к общему знаменателю и приравняем числители полученной и исходной дробей:

$$A(-y^4-3y^2)+B(-2y^3-2y)+C(-3y^2-1)-4Dy+M(y^5-2y^3+y)$$
$$+N(y^4-2y^2+1)=y^2$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях y:

$$y^5:\quad M=0$$
$$y^4:-A+N=0$$
$$y^3:-2B-2M=0$$
$$y^2:-3A-3C-2N=1$$
$$y^1:-2B-4D+M=0$$
$$y^0:-C+N=0$$

Решая полученную систему, получаем:

$$M=B=D=0$$
$$A=C=N=-\frac{1}{8}$$

Тогда

$$\int\frac{y^2}{(y^2-1)^3}dy=\frac{-\frac{1}{8}y^3-\frac{1}{8}y}{(y^2-1)^2}+\int\frac{-\frac{1}{8}}{y^2-1}dy=$$
$$=\{\text{табличный интеграл типа XIII}\}=-\frac{1}{8}\left(\frac{y^3+y}{(y^2-1)^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right)+C$$

Вернемся к переменной t:

$$y=\sin t$$
$$-\frac{1}{8}\left(\frac{y^3+y}{(y^2-1)^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right)+C=$$
$$=-\frac{1}{8}\left(\frac{\sin t\,(\sin^2 t+1)}{\cos^4 t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|\right)+C$$

Вернемся к переменной x:

$$\cos t=\frac{1}{x};\sin t=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$
$$-\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\frac{\left(\frac{x^2-1}{x^2}+1\right)}{\frac{1}{x^4}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-1}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1}\right|\right)+C=$$
$$=-\frac{1}{8}\left(x\sqrt{x^2-1}(2x^2-1)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}\right|\right)+C$$

$$= -\frac{1}{8}\left(x\sqrt{x^2-1}(2x^2-1) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)^2}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}\right|\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{8}\left(x\sqrt{x^2-1}(2x^2-1) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)^2}{x^2-1-x^2}\right|\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{8}\left(x\sqrt{x^2-1}(2x^2-1) + \ln\left|\sqrt{x^2-1}-x\right|\right) + C$$

Окончательно получаем:

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{8}\left(x\sqrt{x^2-1}(2x^2-1) + \ln\left|\sqrt{x^2-1}-x\right|\right) + C$$

II способ. Гиперболическая подстановка (1.91):

$$x = \operatorname{ch} t\,;\, dx = \operatorname{sh} t\, dt;\, \sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} t$$

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}dx = \int \operatorname{ch}^2 t \cdot \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{sh} t\, dt = \int \operatorname{ch}^2 t \cdot \operatorname{sh}^2 t dt = \frac{1}{4}\int \operatorname{sh}^2 2t dt =$$

$$= \left\{\operatorname{sh}^2 2t = \frac{\operatorname{ch} 4t - 1}{2}\right\} = \frac{1}{8}\int (\operatorname{ch} 4t - 1)dt = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 4t - t\right) + C$$

Необходимо вернуться к исходной переменной:

$$\frac{1}{4}\operatorname{sh} 4t = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t = \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t\,(2\operatorname{ch}^2 t - 1) = \sqrt{x^2-1}\cdot x(2x^2-1)$$

$$x = \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Обозначим $e^t = u$, тогда

$$x = \frac{u + \frac{1}{u}}{2} = \frac{u^2+1}{2u}$$

Получаем квадратное уравнение относительно u:

$$u^2 - 2xu + 1 = 0;\, D = 4x^2 - 4;\, u_{1,2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2-1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

Так как $u = e^t > 0$, выбираем решение

$$e^t = x + \sqrt{x^2-1}$$

Тогда

$$t = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$$

Таким образом,

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}4t - t\right) = \frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2-1}\cdot x(2x^2-1) - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)$$

Окончательно получаем

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2-1}\cdot x(2x^2-1) - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right) + \mathrm{C}$$

Заметим, что

$$-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| = \ln\left|\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right| = \ln\left|\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}\right|$$

$$= \ln\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|$$

Таким образом, ответы, полученные двумя различными способами, совпадают.

Ответ:

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2-1}\cdot x(2x^2-1) - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right) + \mathrm{C}$$

Пример 1.40 Найти

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx$$

Решение:

Заданный интеграл-интеграл типа (1.93).

I способ. Тригонометрическая подстановка (1.94):

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx = \left\{x = 3\operatorname{tg}t\,; dx = \frac{3}{\cos^2 t}dt; \sqrt{x^2+9} = \frac{3}{\cos t}\right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{3}{\cos t}}{3\operatorname{tg}t}\frac{3}{\cos^2 t}dt = 3\int \frac{dt}{\sin t\,\cos^2 t} = 3\int \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin t\,\cos^2 t}dt =$$

$$= 3\int\left(\frac{1}{\sin t} + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)dt = 3\left(\int \frac{\sin t\,dt}{\sin^2 t} + \int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt\right) =$$

$$= 3\left(-\int \frac{d(\cos t)}{\sin^2 t} - \int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t}\right) = \{\cos t = y, \sin^2 t = 1-\cos^2 t = 1-y^2\} =$$

$$= -3\left(\int \frac{dy}{1-y^2} + \int \frac{dy}{y^2}\right) = \{\text{табличные интегралы типа XIII и I}\} =$$

$$= -3\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| - \frac{1}{y}\right) + C = 3\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + \frac{1}{\cos t}\right) + C$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} = \left\{\mathrm{tg}\, t = \frac{x}{3}\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\frac{1+\cos t}{1-\cos t} = \frac{1+\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}}{1-\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}-3}$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx = 3\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+9}+3}\right| + \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right) + C$$

II способ. Гиперболическая подстановка (1.95):

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx = \left\{x = 3\,\mathrm{sh}\, t\,;\, dx = 3\,\mathrm{ch}\, t\, dt;\, \sqrt{x^2+9} = 3\,\mathrm{ch}\, t\right\} =$$

$$= \int \frac{3\,\mathrm{ch}\, t}{3\,\mathrm{sh}\, t} 3\,\mathrm{ch}\, t\, dt = 3\int \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}\, t}dt = 3\int \frac{\mathrm{sh}^2 t + 1}{\mathrm{sh}\, t}dt = 3\int\left(\mathrm{sh}\, t + \frac{1}{\mathrm{sh}\, t}\right)dt =$$

$$= 3\left(\mathrm{ch}\, t + \int \frac{\mathrm{sh}\, t\, dt}{\mathrm{sh}^2 t}\right) = \{y = \mathrm{ch}\, t\,;\, dy = \mathrm{sh}\, t\, dt;\, \mathrm{sh}^2 t = \mathrm{ch}^2 t - 1 = y^2 - 1\} =$$

$$= 3\left(\mathrm{ch}\, t + \int \frac{dy}{y^2-1}\right) = 3\left(\mathrm{ch}\, t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) + C =$$

$$= 3\left(\mathrm{ch}\, t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{ch}\, t - 1}{\mathrm{ch}\, t + 1}\right|\right) + C = 3\left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}-1}{\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+1}\right|\right) + C =$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+9}+3}\right|\right) + C$$

Ответ:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx = 3\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+9}+3}\right| + \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right) + C$$

IV. Интегрирование дифференциального бинома.

Выражение

$$x^m(a+bx^n)^p \tag{1.96}$$

называется дифференциальным биномом.

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \tag{1.97}$$

Для нахождения интеграла (1.97) применяются подстановки, известные как подстановки Чебышева.

Интеграл (1.97) может быть найден в элементарных функциях только в следующих случаях:

1) $\boldsymbol{p}$ ***- целое,*** $\boldsymbol{m=\frac{m_1}{m_2}, n=\frac{n_1}{n_2}}$ ***- произвольные числа;***

В данном случае интеграл (1.97) является частным случаем интеграла (1.73), нахождение которого рассмотрено в начале данного параграфа. Согласно (1.74) необходимо сделать подстановку

$$x=t^s, dx=st^{s-1}dt \tag{1.98}$$

где s - наименьшее общее кратное чисел m_2 и n_2.

2) $\boldsymbol{p}$***- нецелое,*** $\boldsymbol{\frac{m+1}{n}}$ ***- целое число;***

Представим $p=\frac{k}{s}$, k, s-целые числа.

Подынтегральная функция в (1.97) рационализируется с помощью подстановки:

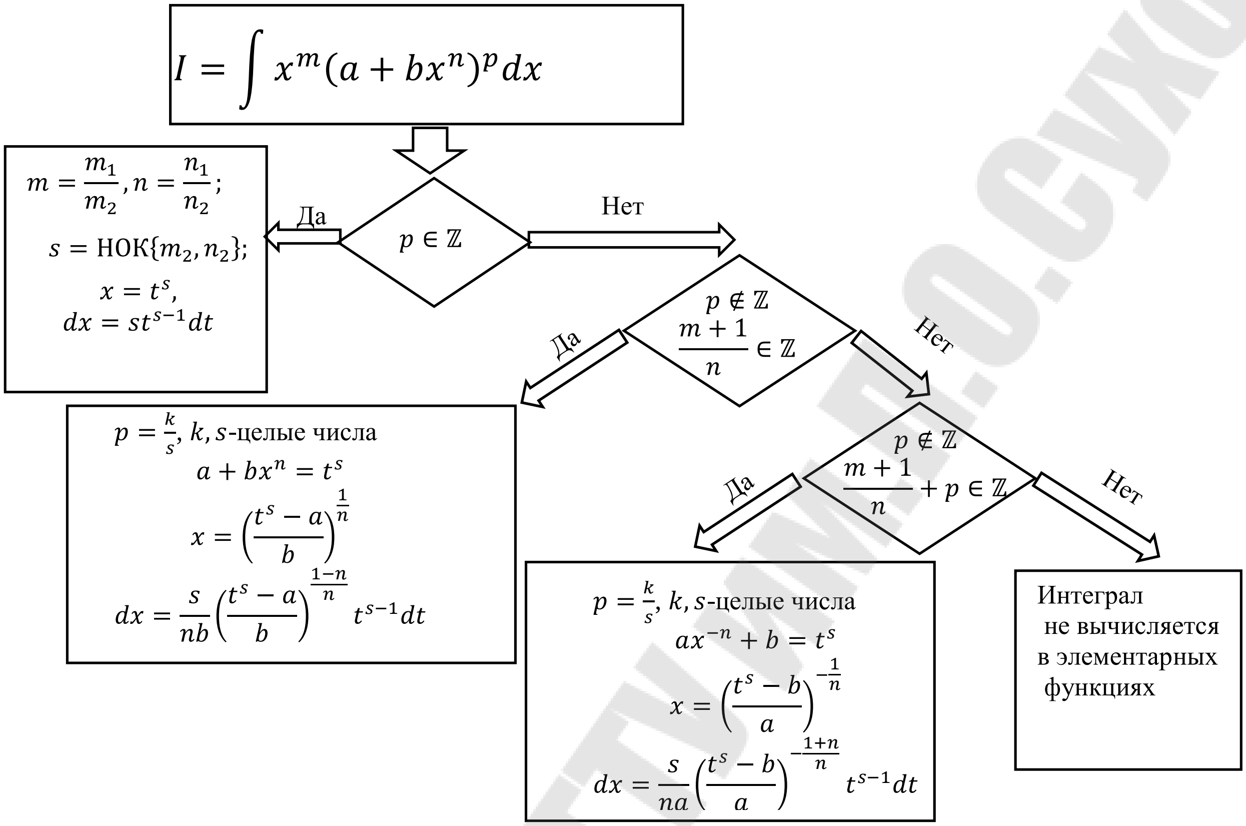
$$a+bx^n=t^s, x=\left(\frac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}; dx=\frac{s}{nb}\left(\frac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{1-n}{n}} t^{s-1}dt \tag{1.99}$$

3) $\boldsymbol{p}$***- нецелое,*** $\boldsymbol{\frac{m+1}{n}+p}$ ***- целое число***.

Подынтегральная функция в (1.97) рационализируется с помощью подстановки:

$$ax^{-n}+b=t^s, x=\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}; dx=\frac{s}{na}\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{-\frac{1+n}{n}} t^{s-1}dt \tag{1.100}$$

Алгоритм нахождения интегралов (1.97) можно представить в виде следующей блок-схемы:



Пример 1.41. Найти

$$\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx.$$

Решение: перепишем данный интеграл в виде (1.97):

$$\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx = \int x^5(1+x^3)^{\frac{2}{3}}dx$$

Выписываем числа p, m и n:

$$p = \frac{2}{3}; m = 5; n = 3$$

$p = \frac{2}{3}$ не является целым;

$\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = 2$-целое, поэтому сделаем замену согласно (1.99)

$$1 + x^3 = t^3.$$

Тогда

$$x = (t^3 - 1)^{\frac{1}{3}};$$

$$dx = (t^3 - 1)^{-\frac{2}{3}} t^2 dt$$

Таким образом

$$\int x^5 (1 + x^3)^{\frac{2}{3}} dx = \int (t^3 - 1)^{\frac{5}{3}} \cdot t^2 (t^3 - 1)^{-\frac{2}{3}} t^2 dt = \int (t^3 - 1) t^4 dt =$$

$$= \int (t^7 - t^4) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{t^5}{40}(5t^3 - 8) + C =$$

$$= \frac{(1 + x^3)^{\frac{5}{3}}}{40}(5 + 5x^3 - 8) + C = \frac{(1 + x^3)^{\frac{5}{3}}}{40}(5x^3 - 3) + C$$

Ответ:

$$\int x^5 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2} dx = \frac{(1 + x^3)^{\frac{5}{3}}}{40}(5x^3 - 3) + C$$

Пример 1.42. Найти

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + x^3}}{x^2} dx$$

Решение: запишем данный интеграл в виде (1.97)

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + x^3}}{x^2} dx = \int x^{-2} (1 + x^3)^{\frac{1}{3}} dx$$

Таким образом, видно, что $p = \frac{1}{3}, m = -2, n = 3$

$p = \frac{1}{3}$ не является целым;

$\frac{m+1}{n} = \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}$ не является целым;

$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{1}{3} + -\frac{1}{3} = 0$ является целым.

Сделаем замену (1.100):

$$x^{-3} + 1 = t^3$$

Тогда

$$x = (t^3 - 1)^{-\frac{1}{3}}; dx = -\frac{1}{3}(t^3 - 1)^{-\frac{4}{3}} \cdot 3t^2 dt = -(t^3 - 1)^{-\frac{4}{3}} t^2 dt$$

$$1 + x^3 = 1 + \frac{1}{t^3 - 1} = \frac{t^3}{t^3 - 1}$$

Подставляя полученные выражения в интеграл, получаем:

$$\int x^{-2}(1+x^3)^{\frac{1}{3}}dx = -\int (t^3-1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{t^3}{t^3-1}\right)^{\frac{1}{3}}(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}t^2dt =$$

$$= -\int (t^3-1)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}t^{1+2}dt = -\int \frac{t^3}{t^3-1}dt = -\int \frac{t^3-1+1}{t^3-1}dt =$$

$$= -\int\left(1+\frac{1}{t^3-1}\right)dt = -\int dt - \int\frac{dt}{t^3-1} = -t - \int\frac{dt}{t^3-1}$$

Вычислим полученный интеграл методом, изложенным в параграфе 1.6.

$$\int\frac{dt}{t^3-1} = \int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Mt+N}{t^2+t+1} = \frac{A(t^2+t+1)+(Mt+N)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

Приравниваем числители полученной и исходной дробей:

$$A(t^2+t+1) + M(t^2-t) + N(t-1) = 1$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем

$$t^2: A + M = 0$$

$$t^1: A - M + N = 0$$

$$t^0: A - N = 1$$

Решая полученную систему, получаем:

$$A = \frac{1}{3} \quad M = -\frac{1}{3} \quad N = -\frac{2}{3}$$

Таким образом

$$\int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)} = \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}}{t^2+t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3}\int\frac{t+2}{t^2+t+1}dt =$$

$$= \left\{t^2+t+1 = t^2 + 2\cdot\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln|t-1| - \int\frac{t+2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt\right) = \left\{y = t+\frac{1}{2}; t = y-\frac{1}{2}; dt = dy\right\} =$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|t-1|-\int\frac{y-\frac{1}{2}+2}{y^2+\frac{3}{4}}dy\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|t-1|-\int\frac{y}{y^2+\frac{3}{4}}dy-\int\frac{\frac{3}{2}}{y^2+\frac{3}{4}}dy\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|t-1|-\frac{1}{2}\int\frac{dy^2}{y^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\int\frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln\left|y^2+\frac{3}{4}\right|-\frac{3}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{2y}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t^2+t+1|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Таким образом,

$$\int x^{-2}(1+x^3)^{\frac{1}{3}}dx=-t-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

Возвращаясь к исходной переменной x

$$x^{-3}+1=t^3, t=(x^{-3}+1)^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x},$$

получаем

$$t-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$-\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}-1\right)^2}{\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}\right)^2+\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)^2}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^3+1}+x}{\sqrt{3}x} + C$$

Ответ:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)^2}\right| + $$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^3+1}+x}{\sqrt{3}x} + C.$$

Задания.

Задание 1.8. Найти интегралы:

1. $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+x}dx$
3. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}dx$
4. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$
5. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1-x)^2}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(1+x)^3}}$
7. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2}$
8. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$
9. $\int \frac{e^{(4-x)/(4+x)}}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}dx$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-1}}$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-7}}$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-2x^2+4x}}$
13. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-8x+25}}dx$
14. $\int \frac{x-2}{\sqrt{1-4x^2-8x}}dx$
15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
16. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$
17. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$
18. $\int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$
19. $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx$
20. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x^4}$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$
22. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$
23. $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[5]{x^2}}dx$
24. $\int \frac{x^3}{\sqrt{(25-x^2)^3}}dx$

25. $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\cdot\sqrt[6]{x^5}}dx$ 26. $\int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}$ 27. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\cdot\sqrt[5]{x}}dx$

<u>*Ответы*</u>: **1.** $\sqrt{2x}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}+C$; **2.** $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$; **3.** $ln\left|\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}\right|+C$; **4.** $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\,arctg\sqrt[6]{x}+C$; **5.** $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$; **6.** $2arctg\sqrt{1+x}+C$; **7.** $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4}+C$; **8.** $\sqrt{1-x}(\sqrt{x}-2)-arcsin\sqrt{x}+C$; **9.** $-\frac{1}{4}e^{\sqrt{(4-x)/(4+x)}}+C$; **11.** $arcsin\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)+C$; **12.** $\frac{1}{\sqrt{2}}arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$; **13.** $\sqrt{x^2-8x+25}+3ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+25}\right|+C$; **14.** $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2-8x}-$ $-\frac{3}{2}arcsin\frac{2x+2}{\sqrt{5}}+C$; **15.** $-arcsin\frac{1}{x}+C$; **16.** $\sqrt{\frac{x}{x+2}}+C$; **17.** $ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\sqrt{2}\,ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{2x+4}\right|+C$; **18.** $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C$; **19.** $\frac{1}{4}\arcsin x-$ $-\frac{1}{8}x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}+C$; **20.** $\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}+C$; **21.** $\frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}-\frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8}+C$; **22.** $3(1+\sqrt[4]{x})\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\cdot\left(\frac{4}{7}\sqrt[4]{x}-\frac{3}{7}\right)+C$; **23.** $-\frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}+C$; **24.** $\frac{50-x^2}{\sqrt{25-x^2}}+C$; **25.** $-\frac{6}{5}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}+C$; **26.** $\frac{1}{3x^3}(2x^2+1)\cdot\sqrt{1+x^2}+$ $+C$; **27.** $-\frac{5}{6}\left(\left(\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}\right)/\sqrt[5]{x^6}\right)+C$.

II. Определенный интеграл

§ 2.1. Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Методы вычисления определенного интеграла.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $y=f(x)$. Разобьем отрезок $[a;b]$ произвольным образом точками $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ на n частичных отрезков длиной $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Выберем внутри каждого частичного отрезка точку ξ_i: $x_{i-1}<\xi_i<x_i$ (рис.1.). Найдем значения функции $y=f(x)$ в точках ξ_i.

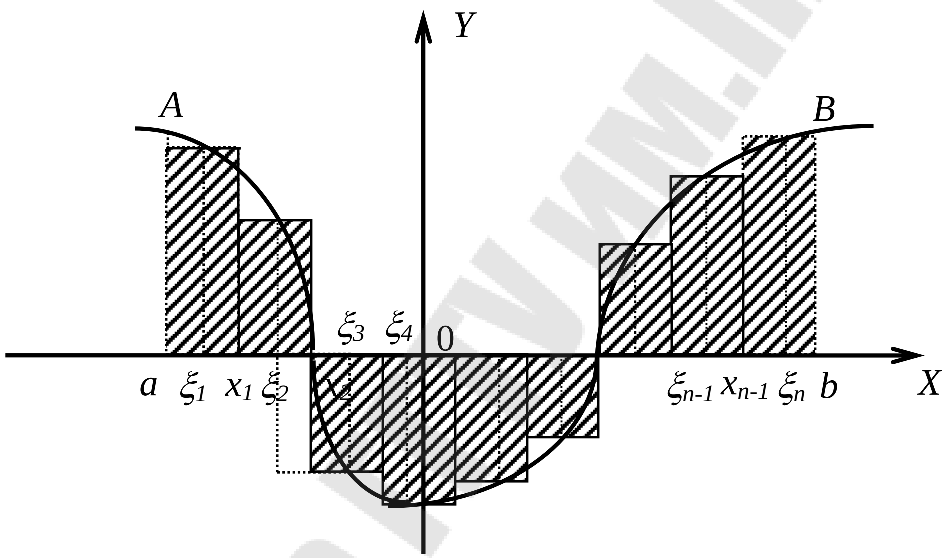


Рисунок 1.

Интегральной суммой функции $y=f(x)$на отрезке $[a;b]$ называется сумма вида:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2.1)$$

Геометрически S_n представляет собой алгебраическую сумму площадей прямоугольников, в основаниях которых лежат частичные отрезки Δx_i, а высоты равны $f(\xi_i)$ (рис. 1).

<u>Определение:</u> Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы (2.1), найденный при условии, что длина наибольшего из частичных отрезков стремится к нулю (число разбиений n стремится к бесконечности):

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (2.2)$$

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования.
Справедлива следующая теорема:
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$; т.е. предел интегральной суммы (2.1) существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$.

Свойства определенного интеграла:

1) $$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (2.1)$$

2) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (2.2)$$

3) $$\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,, \forall a,b,c \qquad (2.3)$$

4) $$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx \qquad (2.4)$$

5) $$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \qquad (2.5)$$

6) Если $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a;b]$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad (2.6)$$

7) Если $f(x) \geq g(x) \ \forall x \in [a;b]$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \qquad (2.7)$$

8) Если $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)\,; M = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и $a < b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \qquad (2.8)$$

9) Теорема о среднем:

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка $x = c, a \leq c \leq b$, такая, что верно равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \tag{2.9}$$

Пусть

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{2.10}$$

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то справедливо равенство

$$\Phi'(x) = f(x) \tag{2.11}$$

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b \tag{2.12}$$

Формула (2.12) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Если $f(x)$- четная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \tag{2.13}$$

Если $f(x)$- нечетная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 \tag{2.14}$$

Если $f(x)$- периодическая функция, с периодом T, то

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = 0 \tag{2.15}$$

Геометрический смысл определенного интеграла.

Если $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции $aABd$, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу - отрезком оси 0X, справа и слева - прямыми $x = a$ и $x = b$. (Рис.2)

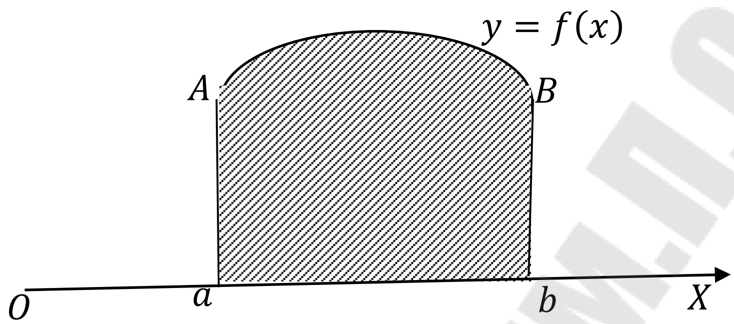


Рисунок 2

Если $f(x) \leq 0 \; \forall x \in [a;b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной снизу графиком функции $f(x)$, сверху - отрезком оси 0X, справа и слева - прямыми $x = a$ и $x = b$. (Рис.3)

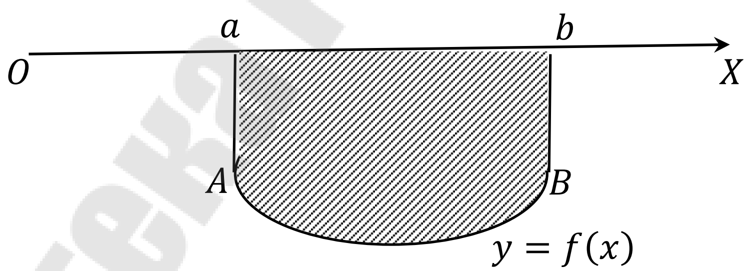


Рисунок 3

Вычисление определенного интеграла.

Определенный интеграл может быть вычислен по определению как предел интегральных сумм согласно (2.2). Однако, в большинстве случаев, целесообразно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница (2.12).

Алгоритм применения формулы (2.12) при вычислении определенного интеграла:
1) Находим неопределенный интеграл $\int f(x)dx$.
2) Вычисляем значение полученного выражения при $x = b$ и $x = a$.
3) Вычисляем разность полученных значений.

Пример 2.1. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx \ .$$

Решение:
Находим соответствующий неопределенный интеграл:

$$F(x) = \int (\sin x + \cos x)^2 dx = \int (\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x\,)dx =$$
$$= \int (1 + \sin 2x)dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

Вычисляем значение полученного выражения при $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = 0$:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos(\pi) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$$
$$F(0) = 0 - \frac{1}{2}\cos 0 = -\frac{1}{2}$$

Окончательно получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx \ = \left(x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$$

Ответ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx = \frac{\pi}{2} + 1$$

При вычислении определенного интеграла применяются те же приемы, что и при нахождении неопределенного интеграла, а именно, замена переменной и метод интегрирования по частям.

Замена переменной в определенном интеграле.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной и монотонна на $[\alpha; \beta]$,$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ и сложная функция $f(\varphi(t))$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, то справедлива формула замены переменной для определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (2.16)$$

Пример 2.2. Вычислить.

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$$

Решение:

Сделаем замену

$$x = t^2, dx = 2tdt$$

Найдем пределы интегрирования для новой переменной t.

$$x = 4 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2$$
$$x = 9 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3$$

Таким образом получаем:

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \int_2^3 \frac{t}{t-1}2tdt = 2\int_2^3 \frac{t^2}{t-1}dt = 2\int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t-1}dt =$$

$$= 2\int_2^3 \frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}dt = 2\int_2^3 \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= \{\text{согласно } (2.5)\} = 2\left(\int_2^3 tdt + \int_2^3 dt + \int_2^3 \frac{dt}{t-1}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2}\Big|_2^3 + t|_2^3 + \ln|t-1||_2^3\right) = 2\left(\frac{9-4}{2} + 3 - 2 + \ln|3-1| - \ln|2-1|\right) =$$

$$= 2\left(\frac{5}{2} + 1 + \ln 2 - \ln 1\right) = 7 + 2\ln 2$$

Ответ:

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = 7 + 2\ln 2.$$

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на $[a; b]$, то имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_a^b udv = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (2.17)$$

Пример 2.3. Вычислить

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}.$$

Решение:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = \begin{Bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} & v = -\operatorname{ctg} x \end{Bmatrix} = -x\operatorname{ctg} x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg} x\, dx =$$

$$= -\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \begin{Bmatrix} \sin x = t, dt = \cos x\, dx \\ t_{\text{н}} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; t_{\text{в}} = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} =$$

$$= -\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln t|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3} - 4\right) + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{12\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3} - 4\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

Ответ:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3}-4\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

Задания.

Задание 2.1. Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x}$

2. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

3. $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$

4. $\int_{0}^{\pi/4} sin^3 x\, cos\, x\, dx$

5. $\int_{0}^{1} (x-1)\, e^{-x}\, dx$

6. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2 x}}$

7. $\int_{0}^{\pi/2} x\, cos\, x\, dx$

8. $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$

9. $\int_{0}^{e-1} ln(x+1)\, dx$

10. $\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$

11. $\int_{0}^{\pi/2} e^{2x}\, cos\, x\, dx$

12. $\int_{2}^{10} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx$

<u>*Ответы*</u>: **1.** 1; **2.** 5; **3.** $\pi/4$; **4.** $1/16$; **5.** $-e^{-1}$; **6.** $\pi/2$; **7.** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}-1$; **8.** $2-\frac{\pi}{2}$; **9.** 1; **10.** $1/4$; **11.** $(e^{\pi}-2)/5$; **12.** $9\sqrt{3}arctg\frac{2}{\sqrt{3}}-10$.

§ 2.2. Несобственные интегралы.

а) Несобственный интеграл первого рода.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на $[a;+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a;b] \in [a;+\infty)$. Тогда несобственным интегралом первого рода или интегралом с бесконечным верхним пределом называют:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \qquad (2.18)$$

Аналогично определяются интегралы:

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad (2.19)$$

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \qquad (2.20)$$

Несобственные интегралы называются **сходящимися**, если пределы в (2.18 - 2.20) существуют и конечны. В противном случае несобственные интегралы первого рода (2.18 - 2.20) называются **расходящимися**.

Пример 2.4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$$

Решение:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{x^2+x-2}$$

Найдем первообразную

$$F(x) = \int\frac{dx}{x^2+x-2}$$

$$\int\frac{dx}{x^2+x-2} = \{x^2+x-2 = (x-1)(x+2)\} = \int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Приравниваем числители полученной и исходной дробей:

$$A(x+2)+B(x-1) = 1$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$x^1: A+B = 0$$

$$x^0: 2A-B = 1$$

Решая систему, получаем

$$A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{1}{3}$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3}(\ln|x-1| - \ln|x+2|) =$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$$

Поэтому, воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница (2.12), получаем

$$\int_2^b \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \Bigg|_2^b = \frac{1}{3} \left(\ln \left| \frac{b-1}{b+2} \right| - \ln \left| \frac{1}{4} \right| \right).$$

Тогда

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3} \left(\ln \left| \frac{b-1}{b+2} \right| - \ln \left| \frac{1}{4} \right| \right) = \frac{1}{3} \lim_{b\to\infty} \left(\ln \left| 1 - \frac{3}{b+2} \right| + \ln 4 \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \ln 2$$

Ответ: интеграл сходится

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{2}{3} \ln 2$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}, a \neq 0 \qquad (2.21)$$

Выясним, при каких значениях p интеграл (2.21) сходится.

1. $p \neq 1$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_a^\infty x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Bigg|_a^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} \right) = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} + \frac{a^{1-p}}{p-1}$$

Если $p > 1$, то $1 - p < 0$, поэтому $\lim\limits_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} = 0$, тогда

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$$

Если $p < 1$, то $1 - p > 0$, поэтому $\lim\limits_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} = \infty$, поэтому

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \infty$$

2. $p = 1$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln|x|\big|_a^b = \lim_{b\to\infty} (\ln|b| - \ln|a|) = \infty$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \left[\begin{array}{l}\text{сходится, если } p > 1\\ \text{расходится, если } p \le 1\end{array}\right., a \ne 0 \qquad (2.22)$$

Признак сравнения.

Если для любой точки $x \in [a; +\infty)$ выполняется соотношение $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ следует сходимость $\int_a^\infty f(x)dx$ и из расходимости $\int_a^\infty f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^\infty \varphi(x)dx$.

Интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится $\int_a^\infty f(x)dx$ и $\int_a^\infty |f(x)|dx$.

Интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется ***условно сходящимся***, если $\int_a^\infty |f(x)|dx$ - расходится, а $\int_a^\infty f(x)dx$- сходится.

Пример 2.5. Исследовать на сходимость несобственный интеграл I-го рода:

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$$

Решение:

Найти первообразную подынтегральной функции затруднительно, поэтому для исследования вопроса о сходимости воспользуемся приведенным выше признаком.

Рассмотрим

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2)}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} > \frac{\ln(x^2)}{x} = \varphi(x)$$

Найдем несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \varphi(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{2\ln x}{x} dx = \left\{\ln x = t; dt = \frac{dx}{x}; t_{\text{н}} = \ln 1 = 0; t_{\text{в}} = \ln b\right\} =$$

$$= 2\lim_{b\to\infty} \int_0^{\ln b} t dt = 2\lim_{b\to\infty} \frac{t^2}{2}\bigg|_0^{\ln b} = \lim_{b\to\infty} (\ln b)^2 = \infty$$

Интеграл $\int_1^{\infty} \varphi(x)dx$ расходится, следовательно, в силу признака сравнения, заданный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$ также расходится.

Ответ: интеграл расходится.

Пример 2.5. Исследовать на сходимость несобственный интеграл I-го рода:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3} dx$$

Решение:

$$\frac{\sin^2 x}{x^3} \le \frac{1}{x^3}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$$

Показатель степени $p = 3$, поэтому данный интеграл сходится согласно (2.22). Следовательно, согласно признаку сравнения, заданный интеграл также сходится.

Ответ: интеграл сходится

б) Несобственный интеграл второго рода.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна везде на $[a; b)$, за исключением правого конца промежутка $x = b$.

Несобственным интегралом второго рода называют

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{2.23}$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна везде на $(a; b]$, за исключением левого конца промежутка $x = a$.
Несобственным интегралом второго рода называют

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{2.24}$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна везде на $[a; b]]$, за исключением точки c.
Несобственным интегралом второго рода называют

$$\lim_{\varepsilon_{1,2}\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx\right) = \int_a^b f(x)dx \tag{2.25}$$

Если пределы, стоящие в правых частях (2.23) - (2.25) существуют и конечны, то несобственный интеграл второго рода называется **сходящимся**. Если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то интеграл (2.20) называется **расходящимся**.

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p} \tag{2.26}$$

Подынтегральная функция обращается в бесконечность при $x = b$. Интеграл (2.26) является несобственным интегралом второго рода.
Выясним, при каких значениях p интеграл (2.26) сходится.

1. $p \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(x-b)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} (x-b)^{-p}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(x-b)^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{(b-\varepsilon-b)^{1-p}}{1-p} - \frac{(a-b)^{1-p}}{1-p}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(-\varepsilon)^{1-p}}{1-p} + \frac{(a-b)^{1-p}}{p-1}$$

Если $p > 1$, то $1 - p < 0$, поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} = \infty$, тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p} = \infty$$

Если $p < 1$, то $1 - p > 0$, поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} = 0$, поэтому

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p} = \frac{(a-b)^{1-p}}{p-1}$$

2. $p = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p} = \int_a^b \frac{dx}{x-b} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{x-b} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x-b|\Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon - \ln|a-b|) = -\infty$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p} = \left[\begin{array}{l}\text{сходится, если } p < 1\\ \text{расходится, если } p \geq 1\end{array}\right. \qquad (2.27)$$

Пример 2.6 Вычислить

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

или доказать его расходимость.

Решение:

Подынтегральная функция имеет особую точку $x = 0$ на отрезке $[-1; 2]$.

Поэтому данный интеграл - несобственный интеграл второго рода. Представим его в виде:

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} + \int_{0+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \left\{\begin{matrix} x = \frac{1}{t}; dx = -\frac{dt}{t^2}; x^2 + 1 = \frac{1}{t^2} + 1 = \frac{1+t^2}{t^2}; \\ x = -\varepsilon \Rightarrow t = -\frac{1}{\varepsilon} \quad x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ x = -1 \Rightarrow t = -1; \quad x = \varepsilon \Rightarrow t = \frac{1}{\varepsilon} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{-1}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\right) =$$

$$= \{\text{табличный интеграл типа XV}\} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\Big|_{-1}^{-\frac{1}{\varepsilon}} + \ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\Big|_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|-\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}}\right| - \ln\left|-1 + \sqrt{1+1}\right| + \ln\left|\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2}}\right|\right.$$

$$\left. - \ln\left|\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}}\right|\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2} - 1}{\varepsilon}\right| - \ln|1| + \ln\left|\frac{\sqrt{1+4} + 1}{2}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2} + 1}{\varepsilon}\right|\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2} - 1}{\sqrt{1+\varepsilon^2} + 1}\right| + \ln\left|\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right| = \infty$$

Ответ: интеграл сходится

Признак сравнения:

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не ограничены слева от точки b полуинтервала $[a; b)$, интегрируемы на любом из отрезков $[a; b - \varepsilon]\forall\varepsilon$ и $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то из сходимости $\int_a^b \varphi(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$ и из расходимости $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^b \varphi(x)dx$.

Пример 2.7 Вычислить

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{(x-1)^2}$$

или доказать его расходимость.
Решение:

$$\frac{e^x}{(x-1)^2} > \frac{1}{(x-1)^2}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Показатель степени $p = 2 > 1$, поэтому, согласно (2.27) данный интеграл расходится. Следовательно, согласно признаку сравнения, заданный интеграл также расходится.

Ответ: интеграл расходится

Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[-a; a] \subset \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, то главным значением несобственного интеграла первого рода от функции $f(x)$ в смысле Коши (V.p.) называется число

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx \qquad (2.28)$$

Если $f(x)$ задана во всех точках промежутка $[a; b]$ кроме особой точки $c \in (a; b)$и $\forall\varepsilon > 0$ существуют собственные интегралы $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ и $\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, то главным значением несобственного интеграла от функции $f(x)$ в смысле Коши называется число:

$$V.p. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right) \qquad (2.29)$$

Пример 2.8. Найти главное значение несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx \ .$$

Решение:

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{a\to\infty} \left(\int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-a}^{a} \frac{xdx}{1+x^2} \right)$$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$- четная функция, поэтому, согласно (2.13)

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{a} \frac{dx}{1+x^2} = 2\,\mathrm{arctg}\, x|_0^a = 2\,\mathrm{arctg}\, a$$

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$- нечетная функция, поэтому согласно (2.14)

$$\int_{-a}^{a} \frac{xdx}{1+x^2} = 0$$

Таким образом:

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{a\to\infty} (2\,\mathrm{arctg}\, a) = 2 \lim_{a\to\infty} \mathrm{arctg}\, a = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

Ответ:

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi$$

Задания.

Задание2.2. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

1. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$
2. $\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$
3. $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$
4. $\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-x^2} dx$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$
6. $\int_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

7. $\int_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ 8. $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}sinx\,dx$ 9. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$

10. $\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$ 11. $\int_{0}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$ 12. $\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{xln^2x}$

13. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 14. $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{sinx}{x^2}\,dx$ 15. $\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$

Ответы: **1.** 1; **2.**(расх); **3.** $10/7$; **4.** $1/2$; **5.** π; **6.** $8/3$; **7.** 2; **8.** $\frac{1}{2}$; **9.** 2; **10.** $-2/e$; **11.** (расх); **12.** $1/ln2$; **13.** π; **14.** (сходится); **15.** (сходится).

§ 2.3. Геометрические приложения определенного интеграла.

а) Вычисление площади плоской фигуры.

Приложение определенных интегралов к вычислению площади плоской фигуры основано на геометрическом смысле определенного интеграла.

- Если данная фигура ограничена двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и двумя вертикальными линиями $x = a$ и $x = b$, причем $f_1(x) \le f_2(x)\ \forall x \in [a;b]$ (рис. 2), то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{a}^{b} \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx \qquad (2.30)$$

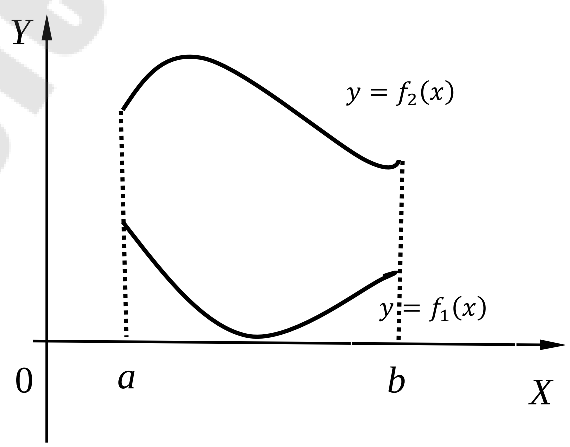


Рисунок 2.

- Если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрическими уравнениями $x = x(t); y = y(t)$,то площадь криволинейной трапеции может быть вычислена по формуле:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \qquad (2.31)$$

где α и β определяются из условий $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$,$y(t) \geq 0, t \in [\alpha; \beta]$.

- Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то площадь криволинейного сектора OM_1M_2 (рис.3), ограниченного дугой кривой и полярными радиусами, соответствующими углам φ_1 и φ_2, вычисляется по формуле:

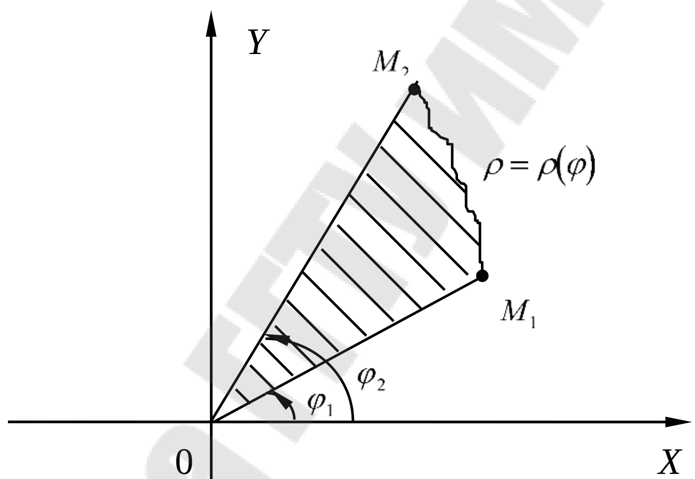


Рисунок 3.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi \qquad (2.32)$$

Пример 2.9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x; y = 3x$.

Решение: изобразим заданную фигуру (рис.4):

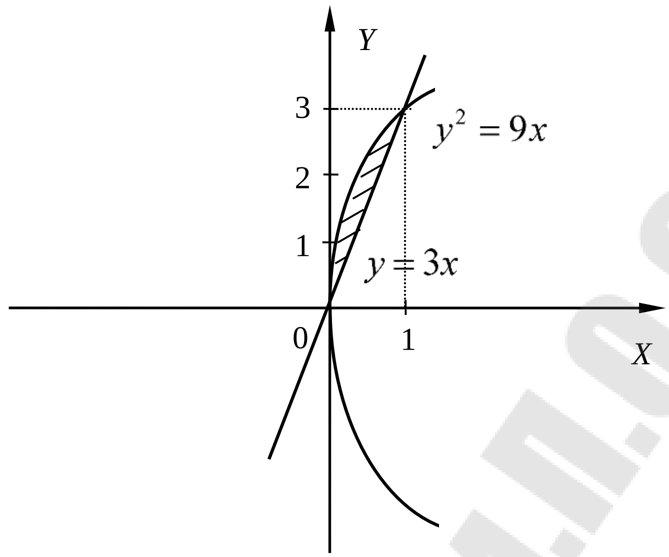


Рисунок 4.

Найдем абсциссы точек пересечения заданных кривых:

$$\begin{cases} y^2 = 9x \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow (3x)^2 = 9x \ \Rightarrow 9x(x-1) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad y = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$$

Тогда площадь заштрихованной фигуры, согласно (2.30), равна:

$$S = \int_0^1 \left(3\sqrt{x} - 3x\right)dx = \left(3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ:

$$S = \frac{1}{2}\ \text{ед}^2$$

Пример 2.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды

$$\begin{cases} y = a(1 - \cos t) \\ x = a(t - \sin t) \end{cases}$$

и осью OX.

Решение:

Первая арка циклоиды определяется из условия

$$y = 0 \Rightarrow a(1-\cos t) = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t_1 = 0; t_2 = 2\pi$$
$$x'(t) = a(1-\cos t)$$

Таким образом, площадь найдем по формуле (2.31)

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt =$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$
$$= \left\{\text{согласно (2.15)} \int_0^{2\pi}\cos nt\,dt = 0\right\} = a^2\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}dt = a^2\frac{3}{2}t\Big|_0^{2\pi} = 3a^2\pi$$

Ответ: $S = 3a^2\pi$

Пример 2.11. Вычислить площадь фигуры, заключенной между первым и вторым витками спирали Архимеда

$$\rho = a\varphi, (a > 0).$$

Решение:

Область между первым и вторым витками спирали соответствует $\varphi_1 = 2\pi; \varphi_2 = 4\pi.$

Площадь найдем по формуле (2.32):

$$S = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi}(a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{4\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_{2\pi}^{4\pi} = \frac{a^2}{6}((4\pi)^3-(2\pi)^3) =$$
$$= \frac{28a^2\pi^3}{3}$$

Ответ:

$$S = \frac{28a^2\pi^3}{3}(\text{ед}^2)$$

б) Вычисление длины дуги кривой.

- Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$, - непрерывно дифференцируемая функция, причем абсциссы точек A и B равны соответственно $x = a$ и $x = b$. Тогда длина дуги $\breve{AB}$ может быть найдена по формуле:

$$L_{\breve{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \qquad (2.33)$$

- Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t); y = y(t)$, где $x(t), y(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции, причем точке А соответствует значение $t = \alpha$, а точке В - $t = \beta$. Тогда длина дуги $\breve{AB}$ кривой вычисляется по формуле:

$$L_{\breve{AB}} = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt \qquad (2.34)$$

- Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$. Причем, точке А соответствует значение φ_1 полярного угла, точке B - значение φ_2.

Тогда длина дуги $\breve{AB}$ может быть найдена по формуле:

$$L_{\breve{AB}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi \qquad (2.35)$$

Пример 2.12. Вычислить длину дуги параболы $y = 2\sqrt{x}$ между точками с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Решение:
Кривая задана явным уравнением, поэтому для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (2.33). Вычисляем $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Таким образом:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx = \left\{1 + \frac{1}{x} = t^2, x = \frac{1}{t^2 - 1}, dx = \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2} dt, \begin{matrix} t_{\text{в}} = \sqrt{2} \\ t_{\text{н}} = \infty \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int\limits_{\infty}^{\sqrt{2}} \frac{-2t^2}{(t^2-1)^2}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{\sqrt{2}}^{b} \frac{2t^2}{(t^2-1)^2}\,dt$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{2t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{2t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A}{(t-1)} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t+1)} + \frac{D}{(t+1)^2} =$$
$$= \frac{A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t+1)(t-1)^2 + D(t-1)^2}{(t-1)^2(t+1)^2}$$

Приравниваем числители полученной и исходной дробей:

$$A(t^3+t^2-t-1) + B(t^2+2t+1) + C(t^3-t^2-t+1) + D(t^2-2t+1) = 2t^2$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t получаем систему из 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} t^3&: \quad A + C = 0 \\ t^2&: \quad A + B - C + D = 2 \\ t^1&: \quad -A + 2B - C - 2D = 0 \\ t^0&: \quad -A + B + C + D = 0 \end{aligned}$$

Решая полученную систему, получаем:

$$A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2} \quad C = -\frac{1}{2} \quad D = \frac{1}{2}$$

Таким образом

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_{\sqrt{2}}^{b} \frac{2t^2}{(t^2-1)^2}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{\sqrt{2}}^{b} \left(\frac{\frac{1}{2}}{(t-1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(t-1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(t+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(t+1)^2} \right) dt$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} - \ln|t+1| - \frac{1}{t+1} \right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{b} =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{2t}{t^2-1} \right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{b} =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right| - \frac{2b}{b^2-1} \right) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| + \sqrt{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

Ответ: $L = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$ (ед.)

Пример 2.13. Вычислить длину астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

Решение:

Кривая задана параметрическими уравнениями, поэтому для вычисления ее длины воспользуемся формулой (2.34)

Вычислим, предварительно, $(x_t')^2 + (y_t')^2$:

$$x_t' = -3a\cos^2 t \sin t$$

$$y_t' = 3a\sin^2 t \cos t$$

$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = (-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t \cos t)^2 =$$

$$= 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t = 9a^2\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t) =$$

$$= 9a^2\cos^2 t \sin^2 t$$

Тогда, согласно (2.34), получаем, учитывая симметрию кривой:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^2 t \sin^2 t}dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt =$$

$$= 6a\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a(\cos\pi - \cos 0) = 6a$$

Ответ: $L = 6a$ (ед.)

Пример 2.14. Вычислить длину кардиоиды

$$\rho = a(1 - \cos\varphi)$$

Решение:

Кривая задана уравнением в полярных координатах, поэтому для вычисления ее длины воспользуемся формулой (2.35).

Найдем

$$\rho_\varphi' = \big(a(1 - \cos\varphi)\big)' = a\sin\varphi$$

Найдем

$$\rho^2 + \left(\rho_\varphi'\right)^2 = a^2\big((1 - \cos\varphi)\big)^2 + a^2\sin^2\varphi =$$

$$= a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = a^2(2 - 2\cos\varphi) = 2a^2(1 - \cos\varphi) =$$

$$= 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Подставив найденное выражение в (2.35), получаем:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 2a\left(-2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a$$

Ответ: $L = 6a$ (ед.)

в) Вычисление объемов тел вращения.

Пусть в пространстве задано тело, образованное вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью OX (рис. 5).

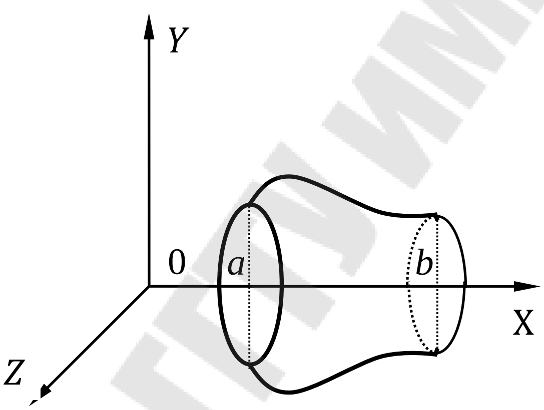


Рисунок 5.

Объем этого тела можно найти по формуле:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \tag{2.36}$$

Аналогично, объем тела, полученный вращением криволинейной трапеции вокруг оси OY, равен

$$V = \pi \int_c^d \left(x(y)\right)^2 dy \tag{2.37}$$

Пример 2.15. Вычислить объем тела, полученного при вращении плоской фигуры, ограниченной линиями

$$(y-3)^2 + 3x = 0$$
$$x = -3$$

вокруг оси OX.

Решение: изобразим заданную плоскую фигуру (рис. 6) и полученное тело (рис. 7)

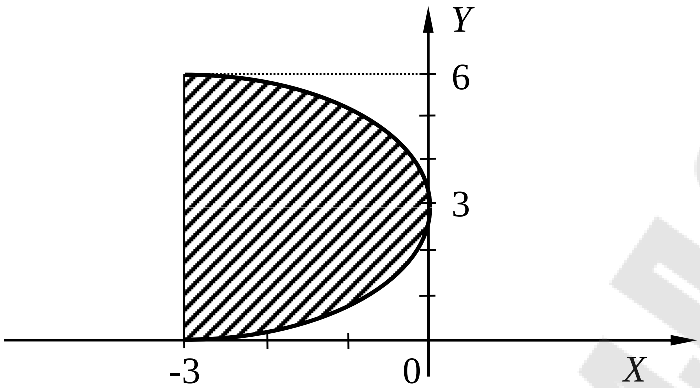


Рисунок 6.

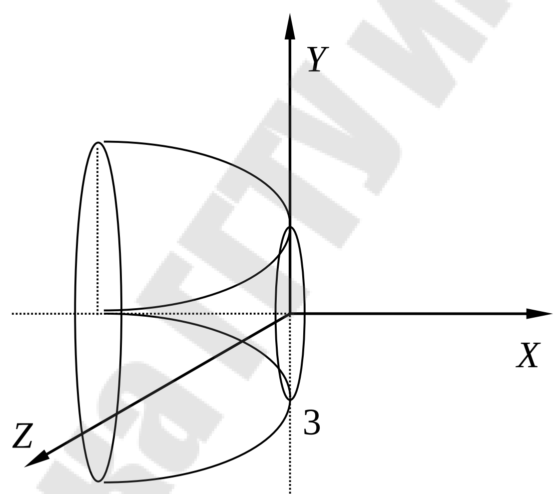


Рисунок 7.

Заданный объем представляет собой разность объемов тел, полученных при вращении верхней ветви параболы $y = 3 + \sqrt{-3x}$ и при вращении нижней ветви параболы $y = 3 - \sqrt{-3x}$.

$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \int_{-3}^{0} \left(3 + \sqrt{-3x}\right)^2 dx$$

$$V_2 = \int_{-3}^{0} \left(3 - \sqrt{-3x}\right)^2 dx$$

$$V = \int_{-3}^{0} \left(3 + \sqrt{-3x}\right)^2 dx - \int_{-3}^{0} \left(3 - \sqrt{-3x}\right)^2 dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} \left(\left(3 + \sqrt{-3x}\right)^2 - \left(3 - \sqrt{-3x}\right)^2\right) dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} \left(3 + \sqrt{-3x} - 3 + \sqrt{-3x}\right)\left(3 + \sqrt{-3x} + 3 - \sqrt{-3x}\right) dx =$$

$$= 12\sqrt{3} \int_{-3}^{0} \sqrt{-x}\, dx = 12\sqrt{3}\left(-\frac{(-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-3}^{0} = 8\sqrt{3}(3)^{\frac{3}{2}} = 72$$

Ответ: $V = 72$ (ед^3)

г) Вычисление площади поверхности тела вращения.

Пусть тело получено вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью OX (рис. 5).

. Тогда площадь поверхности полученного тела вращения можно найти по формуле:

$$V = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + (f_x')^2}\, dx \qquad (2.38)$$

Пример 2.16. Вычислить площадь поверхности тела, полученного при вращении дуги кривой $y = \frac{1}{2}\sqrt{4x - 1}$ от точки $x_1 = 1$ до точки $x_2 = 9$ вокруг оси OX.

Решение:

Чтобы найти S по формуле (2.38), найдем сначала

$$f_x' = \left(y = \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(4x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4 = \frac{1}{\sqrt{4x-1}}$$

Найдем

$$1 + (f_x')^2 = 1 + \frac{1}{4x-1} = \frac{4x}{4x-1}$$

$$1+\left(f_x'\right)^2 = 1+\frac{1}{4x-1} = \frac{4x}{4x-1}$$

Подставив найденное выражение в формулу (2.38), получаем:

$$S = 2\pi\int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}\sqrt{\frac{4x}{4x-1}}\,dx = 2\pi\int_1^9 \sqrt{x}dx = 2\pi\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^9 =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{104\pi}{3}$$

Ответ: $S = \frac{104\pi}{3}$ (ед^2)

Задания.

Задание 2.3.

1) Найти площадь, ограниченную параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 4$.

2) Найти площадь фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически $x = 12cost + 5sint;\ y = 5cost - 12sint; 0 \le t \le 2\pi$.

3) Найти площадь, ограниченную лемнискатой $\rho^2 = 2\,cos2\varphi$.

4) Найти площадь, ограниченную четырехлепестковой розой $\rho = a\,sin2\varphi$.

5) Найти площадь, ограниченную параболами $y^2 = x + 1$ и $y^2 = 9 - x$.

6) Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$, $(y \ge 0)$.

7) Найти длину окружности $x = a\,cost;\ y = a\,sint$.

8) Найти длину дуги кривой $\rho = sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

9) Определить объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными от вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг большей оси (ось Ox) и вокруг меньшей оси (ось Oy).

10) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x-1)^3$ и прямой $x = 2$.

11) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}e^x;\ x = 1; y = 0$.

12) Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = sin2x$ от $x = 0$ до $x = \pi/2$.

Ответы: **1.** $4(\text{ед})^2$; **2.**$169\pi^2(\text{ед})^2$; **3.** $2(\text{ед})^2$; **4.** $\frac{1}{2}\pi a^2(\text{ед})^2$; **5.** $\frac{40}{3}\sqrt{5}(\text{ед})^2$; **6.** $\frac{1}{27}\left(13\sqrt{3}-8\right)$ ед; **7.** $2\pi a$ ед; **8.** $\frac{1}{8}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$ед; **9.** $V_x = \frac{4}{3}\pi ab^2(\text{ед})^3$; $V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b(\text{ед})^3$; **10.** $\frac{\pi}{4}(\text{ед})^3$; **11.** $\frac{\pi}{4}(e^2+1)(\text{ед})^3$; **12.** $\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right)(\text{ед})^2$.

Литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2008, 2010, 2011, 2013.
2. Гусак, А. А. Высшая математика : учеб. для вузов : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2001, 2004, 2007, 2009.
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. для вузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – 10-е изд. – М. : Наука, 1972.
4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969.
5. Индивидуальные задания по высшей математике : в 2 ч. ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 2006, 2007, 2008, 2010, 2013.
6. Руководство к решению задач по высшей математике : в 2 ч. : учеб. пособие для втузов / Е. И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989, 1990.
7. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие для вузов / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1975.
8. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. – М. : Астрель, 2002. – 558 с.
9. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. : учеб. пособие для втузов / П. Е. Данко. А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1999, 2006, 2008.
10. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М. : Астрель, 2001, 2002.

Авакян Елена Зиновьевна
Авакян Сергей Левонович

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**Учебно-методическое пособие
для студентов технических специальностей
дневной формы обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 02.08.22.

Рег. № 29Е.
http://www.gstu.by